SESSION 2003

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve commune concours Physique et concours Chimie

MATHEMATIQUES

PARTIE I

Durée : 2 heures

Les calculatrices **sont autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les trois exercices sont indépendants.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.

Exercice I – Un développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Un équivalent de H_n

Soit n un entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Si k est un entier non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.

b. En déduire l'encadrement suivant : $\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$.

c. Donner un équivalent de H_n en $+\infty$.

2. Suites adjacentes

Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est-à-dire que :
(v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n \leq w_n + 1$.
En déduire que la suite (v_n) est majorée.

b. Montrer de même que la suite (w_n) est minorée.

c. En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.

Tournez la page S.V.P.

3. Constante d'Euler

On pose, pour $n \geq 1$, $c_n = H_n - \ln n$ et $d_n = c_n - \dfrac{1}{n}$.

a. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$.

b. Montrer que les suites (c_n) et (d_n) convergent vers une même limite.
On note alors γ cette limite (γ est appelée constante d'Euler).

c. Montrer que : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice II – Endomorphismes f vérifiant : Ker f = Im f .

A. Propriétés

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E vérifiant : Ker f = Im f.

a. Montrer que nécessairement n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n.

b. Montrer que, pour tout vecteur x de E, $(f \circ f)(x) = 0$.

2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et dim E = 2 rang (f).

a. Montrer que Im $f \subset$ Ker f.

b. En déduire que Ker f = Im f.

B. Cas général

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E de rang p vérifiant Ker f = Im f.

3. Donner p en fonction de n.

4. Soit F un supplémentaire de Ker f dans E, soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de F et soit $(e'_1, e'_2, ..., e'_p)$ une base de Ker f.

a. Que peut-on dire de la famille $(e_1, e_2, ..., e_p, e'_1, e'_2, ..., e'_p)$?

b. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p))$ est une base de Im f.

c. Posons, pour tout entier i compris entre 1 et p, $e_{p+i} = f(e_i)$; calculer $f(e_{p+i})$.

d. Montrer que la famille $(e_1, e_2, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_{2p})$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

C. Application

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Déterminer, en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, une base de Ker f et une base de Im f et, sans aucun calcul, déterminer A^2.

6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

7. Déterminer les vecteurs d'une telle base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Exercice III – Règle de Raabe-Duhamel

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall\, n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, montrer que : si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2. Soit β un réel non nul et (u_n) une suite de réels strictement positifs satisfaisant à :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

a. Montrer que, si l'on pose, pour $n \geq 1$ et α réel $\alpha > 0$, $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, on a :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

b. Si $\beta > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge. (On pourra choisir le réel $\alpha \in \left]1, \beta\right[$)

c. Si $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Déterminer, <u>en utilisant la règle de Raabe-Duhamel</u> (résultats **2b** et **2c** ci-dessus), la nature des séries de terme général u_n :

a. $u_n = \dfrac{(2\,n)\,!}{2^{2\,n}\,(n\,!)^2}$.

b. $u_n = \dfrac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)....(b+n-1)}$ où a et b sont deux réels qui ne sont pas des entiers négatifs.
(On discutera selon la valeur de $b - a$)

Fin de l'énoncé.