SESSION 2003

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

MATHEMATIQUES

PARTIE II

Durée : 2 heures

Les calculatrices **sont autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Nombres et polynômes de Bernoulli, applications au calcul de $\zeta(2k)$ et $\sum_{k=1}^{n} k^p$.

Notations

On pose pour tout réel $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$\mathbb{R}[X]$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Objectifs

Le but du problème est de calculer les valeurs de $\zeta(2k)$ où k est un entier non nul (paragraphe II) ainsi que les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^p$ où p et n sont des entiers naturels non nuls (paragraphe III).
Pour cela, on utilisera les polynômes et nombres de Bernoulli étudiés dans le paragraphe I.

Les formules à établir au paragraphe I peuvent être utilisées sans démonstration aux paragraphes II et III.
Les paragraphes II et III sont indépendants.

Tournez la page S.V.P.

I – Polynômes et nombres de Bernoulli

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes notées (P_1) :

$$\{B_0 = 1\,,\quad \forall n \in \mathbb{N}\ :\ B'_{n+1} = B_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2\ :\ B_n(1) = B_n(0)\} \qquad (P_1)$$

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

a. Montrer que nécessairement $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$ et $B_2(X) = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{12}$.

b. Déterminer B_3 et B_4.

2. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1).

a. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

On note alors L l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe Q.

b. Montrer qu'une suite de polynômes (B_n) vérifie (P_1) si et seulement si elle vérifie la propriété suivante notée (P_2) :

$$\{B_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ B_{n+1} = L(B_n)\} \qquad (P_2)$$

c. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes vérifiant les propriétés (P_1).
On notera cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

3. Déduire de la question **2.**, que pour tout entier naturel n, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

4. On pose, pour tout n, $b_n = B_n(0)$; b_n est le $(n+1)$-ième nombre de Bernoulli.

a. Calculer b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

b. Montrer que pour tout entier impair $n \geq 3$, $b_n = 0$.

II – Application au calcul de $\zeta(2k)$

Soit k un entier naturel non nul. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour } x \in [0,\, 2\pi[\text{ et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

5. Si on pose $\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t)\,\mathrm{d}t$

et pour $n \geq 1$, $\alpha_n(k) = 2\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi\, n\, t)\,\mathrm{d}t$ et $\beta_n(k) = 2\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2\pi\, n\, t)\,\mathrm{d}t$

montrer que pour tout réel x on a : $g_k(x) = \alpha_0(k) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n(k) \cos(n\,x) + \beta_n(k) \sin(n\,x) \right)$.

6. Calculer $\alpha_0(k)$.

7. **a.** Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n(1) = \dfrac{2}{(2\pi\,n)^2}$.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$, $\alpha_n(k) = \dfrac{-1}{(2\pi\,n)^2}\alpha_n(k-1)$.

c. En déduire pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$, la valeur de $\alpha_n(k)$.

8. Montrer sans calcul que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$, $\beta_n(k) = 0$.

9. **a.** Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}.

b. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

III – Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$

10. Soit p un entier naturel, on définit l'application Δ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ par :
$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

b. Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$.

c. Montrer que $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_p[X]$.

11. En déduire que pour tout entier naturel p, il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que : $\Delta(Q) = \dfrac{X^p}{p\,!}$ et $\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

12. Montrer que ce polynôme Q est en fait B_{p+1}.

13. En déduire que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^p = p\,!\left(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}\right)$.

14. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Fin de l'énoncé.