SESSION 2004

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve commune concours Physique et concours Chimie

MATHEMATIQUES

PARTIE I

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont ***autorisées****.*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les deux exercices sont **indépendants.**

Exercice I – Etude de séries dont le terme général est le reste d'une série convergente.

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit $\sum_{n\geq n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour n entier naturel supérieur ou égal à n_0, r_n son reste de rang n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

Exemple 1

1. On pose pour $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Calculer r_n puis montrer que $\sum_{n\geq 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

Exemple 2

2. On pose pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Nous allons chercher un équivalent de (r_n).

Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

Tournez la page S.V.P.

a. Montrer que $\forall t \in [k, k+1],\ \dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier N supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$.

c. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :
$\dfrac{1}{n+1} \leq r_n \leq \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

d. Donner alors un équivalent de (r_n) lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$?

<u>Exemple 3</u>

On pose pour $n \geq 1$, $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3. Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.

4. Expression intégrale de r_n.

Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite (I_n) par $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

b. Montrer que $I_n = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.

c. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer r_n en fonction de I_n.

5. Conclusion

a . En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :
$I_n = \dfrac{(-1)^n}{a(n+1)} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$ sont à déterminer.

b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} r_n$.

<u>Exercice II</u> – Racines carrées de matrices

On rappelle que $M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels.
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice $R \in M_3(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
Le but de l'exercice est de chercher les racines carrées de la matrice A dans les deux exemples suivants qui sont **indépendants**.

<u>Exemple 1</u> Cas où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Réduction de A
Déterminer le polynôme caractéristique de A puis justifier l'existence d'une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

8. Racines carrées de D
Soit S une racine carrée de D.
- **a.** Montrer que $DS = SD$.
- **b.** Montrer que la matrice S est diagonale.
- **c.** Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note respectivement s_i et d_i les coefficients diagonaux des matrices S et D. Exprimer s_i en fonction de d_i puis en déduire les racines carrées de la matrice D.

9. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. (On ne demande pas de calculer P.)

<u>Exemple 2</u> : Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Question préliminaire : Endomorphisme nilpotent

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ **nilpotent**, c'est-à-dire vérifiant $f^N = 0$ pour un certain entier naturel N.
Il existe alors un entier naturel non nul k tel que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$.
Le but de la question est de montrer que $k \leq 3$.

Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^{k-1}(x) \neq 0$.

a. Montrer que pour $i \in \{0,1,...,k-1\}$, le vecteur $f^i(x)$ est non nul. (on rappelle que $f^0(x) = x$)

b. Montrer que les vecteurs $\left(f^i(x)\right)_{0 \leq i \leq k-1}$ forment une famille libre.

c. Que peut-on en déduire pour k ? Justifier votre réponse.

<u>Remarque</u> : Si une matrice M représente dans une base un endomorphisme f nilpotent, on dit que M est **nilpotente.**

11. Supposons qu'il existe R une racine carrée de A.

a. Calculer A^2, A^3. En déduire que R est nilpotente.

b. Calculer alors R^4. Comparer avec A^2 puis conclure.

Fin de l'énoncé.