SESSION 2004

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

MATHEMATIQUES

PARTIE II

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont ***autorisées****.*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Un calcul de l'intégrale de Gauss, $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Le but du problème est de calculer l'intégrale de Gauss, $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ en utilisant une suite de fonctions qui converge vers $x \mapsto e^{-x^2}$.

Les deux premiers paragraphes sont **indépendants**, le troisième paragraphe utilise les résultats démontrés dans les deux paragraphes précédents.

<u>Questions préliminaires</u>

1. Montrer que l'intégrale I est bien définie.

2. On définit sur $[0,1[$ la fonction Ψ par $\Psi(t) = t + \ln(1-t)$.

a. Etudier les variations et le signe de Ψ.

b. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de Ψ.

I. <u>Un équivalent des intégrales de Wallis et une application</u>

Pour tout entier naturel n, on définit la suite des intégrales de Wallis (I_n) par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,dx .$$

Tournez la page S.V.P.

3. **Une relation de récurrence**
   a. Calculer I_0 et I_1.
   b. Justifier que (I_n) est une suite de réels strictement positifs.
   c. Montrer que pour $n \geq 1$, on a $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$.

4. Pour tout entier naturel non nul *n*, on définit la suite (u_n) par $u_n = nI_{n-1}I_n$.

   Montrer que (u_n) est une suite constante et en déduire que $I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi}{2n}$.

5. **Equivalent de I_n**
   a. Montrer que pour $n \geq 1$, on a $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.
   b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.
   c. Donner alors un équivalent de (I_n) à l'infini.

6. **Application :**

   Pour tout entier naturel *n* non nul, on définit la suite (J_n) par $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

   a. Montrer que pour $n \geq 1$, $J_n = \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\, \mathrm{d}x$.
   b. En déduire la limite de (J_n) en $+\infty$.

II. <u>Intégration sur un intervalle non borné de la limite d'une suite de fonctions</u>

Si (f_n) est une suite convergente de fonctions définies sur l'intervalle <u>non borné</u> $[0, +\infty[$, on souhaite trouver une condition suffisante pour pouvoir permuter limite et intégrale, c'est-à-dire avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x$. Le but du paragraphe est donc de donner cette condition suffisante.

A - La convergence uniforme est insuffisante…

7. Pour tout entier naturel *n* non nul, on définit sur $[0, +\infty[$ la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & \text{si } x \in [0, n[\\ -\dfrac{x}{n^2} + \dfrac{2}{n} & \text{si } x \in [n, 2n[\\ 0 & \text{si } x \in [2n, +\infty[\end{cases}$$

a. Représenter le graphe de g_2.

b. Soit $n \geq 1$, montrer que g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(x)\ \mathrm{d}x$ en utilisant des considérations géométriques.

c. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)\ \mathrm{d}x$?

B - Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui converge uniformément sur tout segment $[0, a]$ inclus dans $[0, +\infty[$ avec $a > 0$ vers une fonction f.

On suppose en plus que la suite (f_n) est dominée, c'est-à-dire qu'il existe une fonction g continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$ converge et telle que $\forall n \geq 1,\ |f_n| \leq g$.

8. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

9. Soit $\varepsilon > 0$.

a. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction φ par $\varphi(t) = \int_t^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Déterminer la limite de φ en $+\infty$ puis justifier l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $\int_A^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

b. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\ \mathrm{d}x + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$.

III. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0,+\infty[$ la suite de fonctions (f_n) par :

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x\in\left[0,\sqrt{n}\right[\\ 0 & \text{si } x\in\left[\sqrt{n},+\infty\right[\end{cases}$$

On note aussi f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

10. Soit x un réel strictement positif.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $f_n(x)\le f(x)$ (on pourra utiliser la fonction Ψ).

b. Montrer que pour tout entier n vérifiant $n>x^2$, on a $\left|f_n(x)-f(x)\right|=\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-\mathrm{e}^{n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right)$.

c. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

11. Soit a un réel strictement positif.
Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers f.

12. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathrm{d}x$ puis conclure quant à la valeur de I.

Fin de l'énoncé.