SESSION 2005

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve commune concours Physique et concours Chimie

MATHEMATIQUES

PARTIE I

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

<u>Exercice 1</u> Calcul de l'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

1. Existence de I

On définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$.

Justifier que f est continue sur $[0,+\infty[$ puis montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente. On pourra intégrer par parties l'intégrale $\int_1^{A} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ $(A > 1)$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit I_n et J_n par : $I_n = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \mathrm{d}t .$$

a. Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \mathrm{d}t$.

b. Soient $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et k un entier naturel non nul.

Ecrire $\sin x \cos(2kx)$ à l'aide d'une différence de deux « sinus » et en déduire une relation entre $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ et $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.

Tournez la page S.V.P.

c. Calculer J_n.

3. Lemme de Lebesgue

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ où a et b sont des réels avec $a < b$.

On pose, pour tout entier naturel n, $L_n = \int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite (L_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On définit la fonction φ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi(0) = 0$.

a. Donner le développement limité à l'ordre 1 en 0 de φ.

b. Montrer que φ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

On **admet** pour la fin de l'exercice que φ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (cela se démontre avec des calculs de développements limités).

5. Conclusion

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$ et en déduire la valeur de l'intégrale I.

<u>Exercice 2</u> **Quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.**

Soit n un entier naturel non nul. On note $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$- espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n.

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ (respectivement une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$) est **nilpotent** (respectivement **nilpotente**) s'il existe un entier k tel que $f^k = 0$ (respectivement $M^k = 0$).

6. Etude d'un exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est nilpotente.

b. Déterminer la dimension du noyau de A.

c. Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?

7. Etude d'endomorphismes nilpotents particuliers

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a. Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.
Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, puis calculer la dimension de $\operatorname{Ker} f$.

b. Soit f un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans cette base.

8. Diagonalisation des matrices nilpotentes.

a. Déterminer les matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables.

b. Application : Déterminer les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont nilpotentes.

<u>Exercice 3</u> **Résolution d'une équation « intégrale »**

9. Questions préliminaires

a. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = 0$.

b. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer avec soin que l'application $\varphi : x \mapsto \int_0^x (x-t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

10. Application :

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) + \int_0^x (x-t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = 1$ (on pourra remarquer que f est dérivable et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$).

- Fin de l'énoncé -