SESSION 2007

CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours National DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

MATHEMATIQUES - PARTIE II

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées.**

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Exercice

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où f_n est définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{nx}{n^4+x^2}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On peut donc définir sur $[0,+\infty[$ la fonction S par $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Calculer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq 0}|f_n(x)|$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

3. Soit $A>0$. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,A]$.
En déduire que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

Utilisation des polynômes de Tchebychev en interpolation polynomiale

Notations :

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est un élément de E, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ (c'est la norme infinie de f).

On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.

I. Notion de polynôme interpolateur

f désigne une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
n est un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ de $[-1,1]$.
On appelle **polynôme interpolateur** de f aux points x_i, un polynôme P à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n vérifiant pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $P(x_i) = f(x_i)$.

4. Quelques exemples

a. Déterminer un polynôme interpolateur de la fonction $x \mapsto e^x$ dans le cas où $n=1$ aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

b. Déterminer un polynôme interpolateur de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ dans le cas où $n=2$ aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5. Cas général

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On considère l'application linéaire φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par
$P \mapsto \big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big)$.

a. Déterminer le noyau de φ.

b. Justifier que φ est un isomorphisme. En déduire que la fonction f admet un unique polynôme interpolateur de degré inférieur ou égal à n aux points x_i. On le note $L_n(f)$.

II. Polynômes de Tchebychev

Pour tout entier naturel n, on définit sur $[-1,1]$ la fonction T_n par : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

6. Premières propriétés

a. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$
(On pourra calculer $T_{n+2}(x) + T_n(x)$).

b. Calculer T_0, T_1, T_2, T_3.

c. Justifier que T_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

7. Racines

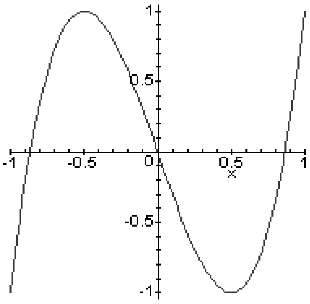
Montrer que la fonction polynomiale T_n admet n racines distinctes que l'on précisera.

8. Extrema alternés

a. Calculer $\|T_n\|_\infty$ puis déterminer pour k dans $\{0,1,\ldots,n\}$ des réels c_k distincts avec $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ tels que
$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $|T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty$ et que $\forall k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont appelés « points de Tchebychev de T_n ».

b. Lire sur le graphe suivant, qui représente le polynôme T_3, les réels c_0, c_1, c_2, c_3.



9. Une propriété de minimalité des polynômes de Tchebychev

Soit P un polynôme unitaire (le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1) de degré $n+1$.
On pose $Q = P - 2^{-n} T_{n+1}$.

a. Le polynôme Q est-il de degré $n+1$?

b. Montrer que $\|P\|_\infty \geq 2^{-n}$. On pourra raisonner par l'absurde, et s'intéresser aux changements de signe de Q en l'évaluant aux points de Tchebychev de T_{n+1}.

Le polynôme $2^{-n} T_{n+1}$ possède donc la norme infinie ($\|2^{-n} T_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}$) la plus petite parmi tous les polynômes unitaires de degré $n+1$.

III. Expression et minimisation de l'erreur d'interpolation

On pose $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, on définit alors une fonction polynomiale de degré $n+1$ que l'on note π_σ par $\pi_\sigma(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, pour x dans $[-1,1]$.

On suppose de plus que f est de classe C^{n+1} sur $[-1,1]$. On rappelle que $L_n(f)$ est l'unique polynôme interpolateur de f aux points x_i de degré inférieur ou égal à n.

On veut démontrer pour tout réel x de $[-1,1]$, la propriété suivante $(\mathcal{P}_x)$:

$$(\mathcal{P}_x) : \exists \xi_x \in \left]-1,1\right[,\ f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x).$$

10. Montrer que pour tout réel x de σ, $(\mathcal{P}_x)$ est vraie.

11. Soient $p \geq 1$ un entier et g une fonction p fois dérivable sur $[-1,1]$. On suppose qu'il existe $p+1$ réels $a_0 < a_1 < \ldots < a_p$ de $[-1,1]$ tels que $\forall i \in \{0,1,\ldots,p\},\quad g(a_i) = 0$.
Montrer par récurrence sur p qu'il existe ξ dans $\left]-1,1\right[$ tel que $g^{(p)}(\xi) = 0$.

12. Soit x un réel de $[-1,1]$ qui n'est pas dans σ. On définit une application F sur $[-1,1]$ par $\forall t \in [-1,1]$, $F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t)$ où λ est un réel.

a. Déterminer le réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

b. Montrer que F s'annule en $n+2$ points. En déduire que $(\mathcal{P}_x)$ est vraie.

13. **Conclusion**

a. En déduire que $\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty \|\pi_\sigma\|_\infty$.

b. En vous servant des résultats du paragraphe **II.**, expliquer comment on peut choisir les points d'interpolation x_i pour contrôler l'erreur $\|f - L_n(f)\|_\infty$.

Fin de l'énoncé