

MECANIQUE

PARTIE II

Durée : 2 heures

PARTIE II

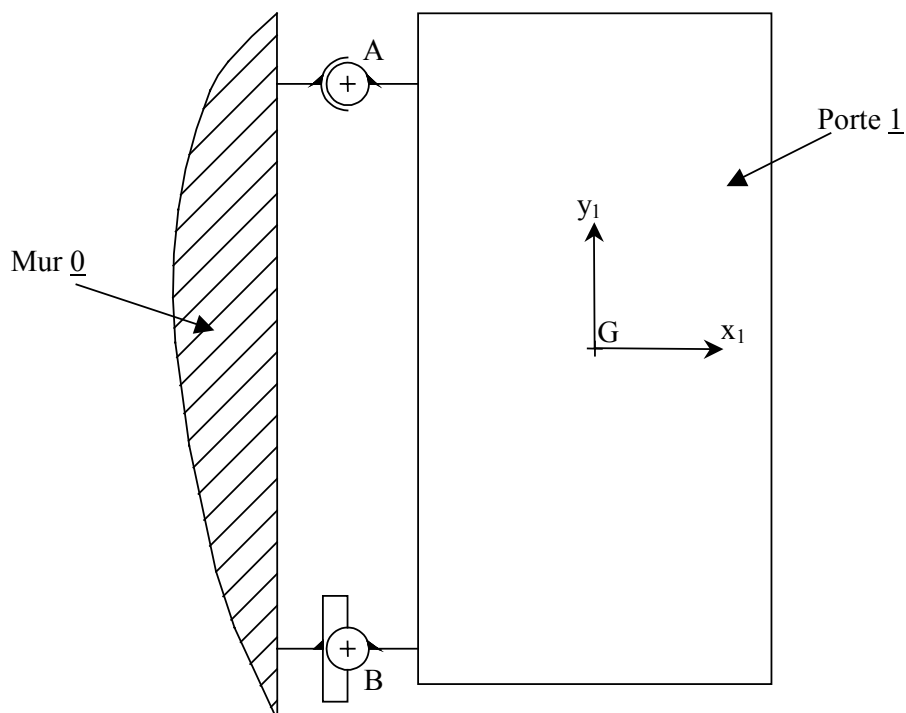
*Les calculatrices sont **autorisées**.*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Avertissement : Tous les résultats numériques sont demandés dans un format scientifique avec une précision au millième (exemple : $1,623 \cdot 10^{-3}$) et en unité S.I., unité qui est à préciser.

Exercice 1 : Etude d'une porte



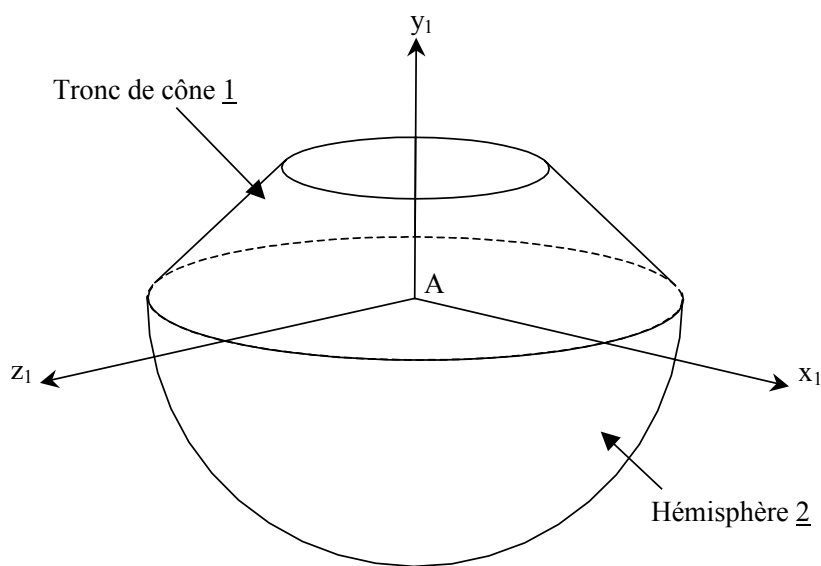
On étudie ici le schéma cinématique d'une porte 1 en liaison aux points A et B avec le mur 0.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_1$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est associé à la porte 1.

On suppose que les liaisons en A et en B sont parfaites.

- 1.1 Identifier les liaisons en A et en B . On prendra soin de bien noter le nom de la liaison ainsi que sa caractéristique (axe, normale, centre...). Par exemple, liaison PIVOT d'axe $C\vec{y}$.
- 1.2 Pour chaque liaison, déterminer la forme du torseur cinématique correspondant.
- 1.3 En explicitant le fait que la puissance des actions transmissibles par chaque liaison est nulle, déterminer les torseurs $\{T_{1/0}\}_A$ et $\{T_{1/0}\}_B$ des actions transmissibles par les liaisons en A et en B .

Exercice 2 : Culbuto

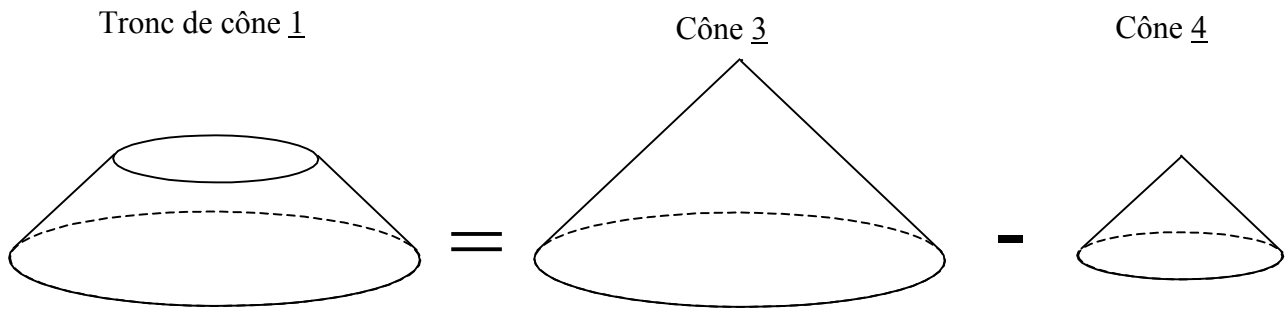


On considère un culbuto (S) constitué d'un tronc de cône 1 sur lequel on a collé un hémisphère 2 sur sa grande base. Le tronc de cône 1, de masse volumique ρ_1 , possède une grande base de rayon R , une petite base de rayon $\frac{R}{2}$ et une hauteur $\frac{R}{2}$. L'hémisphère 2, de masse volumique ρ_2 , est de rayon R .

Le point A désigne le centre de la grande base du tronc de cône 1 ainsi que le centre de la base de l'hémisphère 2.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_1$ est rapporté au repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est associé au culbuto (S).

Par la suite, on considérera que le tronc de cône 1 est obtenu par la soustraction de deux cônes 3 et 4, le cône 3 ayant une base de rayon R et une hauteur R tandis que le cône 4 possède une base de rayon $\frac{R}{2}$ et une hauteur $\frac{R}{2}$.

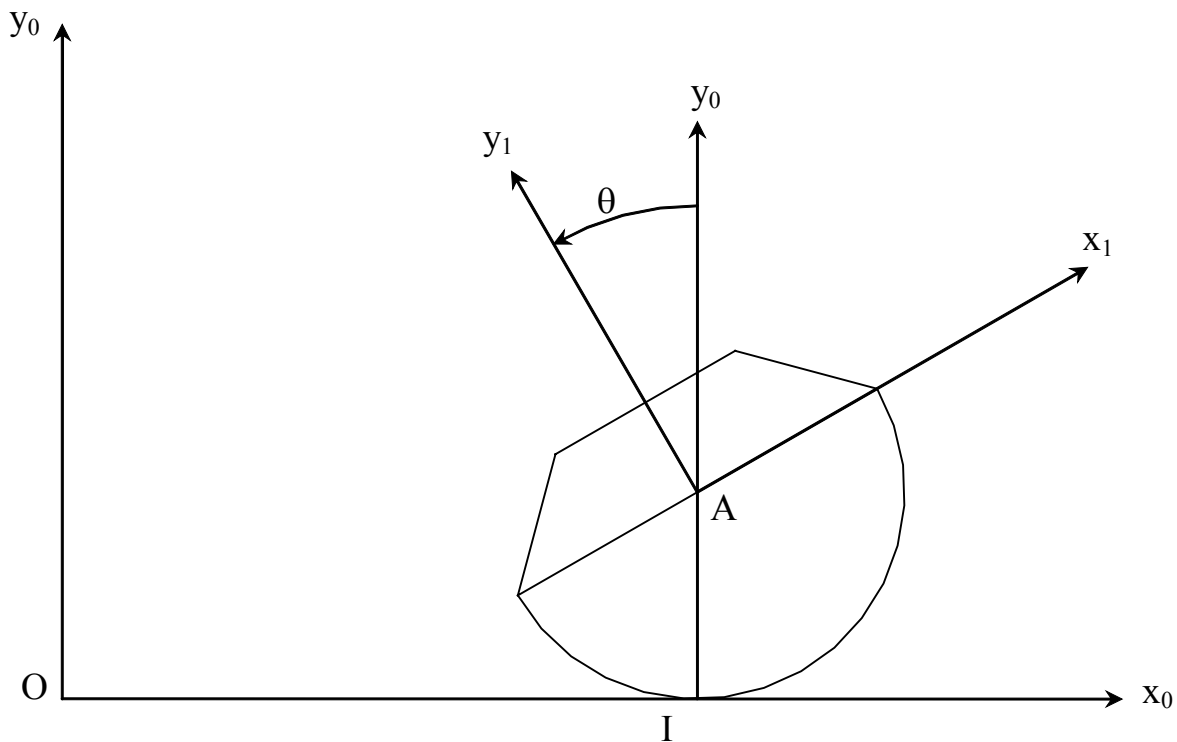


Géométrie des masses :

- 2.1** Déterminer m_3 , m_4 et m_1 respectivement les masses du cône 3, du cône 4 et du tronc de cône 1 en fonction de ρ_1 et R . En déduire m_3 et m_4 en fonction de m_1 .
- 2.2** Déterminer la masse m_2 de l'hémisphère 2 en fonction de ρ_2 et R .
- 2.3** Déterminer la position du centre de gravité G_1 du tronc de cône 1 en fonction de R .

Le centre de gravité G_2 de l'hémisphère 2 est tel que $\overrightarrow{AG_2} = -\frac{3}{8} R \overrightarrow{y_1}$.

- 2.4** Déterminer la position du centre de gravité G du culbuto (S) en fonction de ρ_1 , ρ_2 et R .



On écarte le culbuto (S) de sa position d'équilibre et on étudie ses oscillations autour de l'axe $\overrightarrow{Az_1}$.

Le culbuto (S) roule sans glisser en I sur l'axe Ox_0 . Le culbuto (S) n'est alors soumis qu'à 2 actions extérieures : son poids propre $\vec{P}$ au point G et l'action de contact $\overrightarrow{R_{sol/S}}$ au point I .

On note $\vec{g} = -g \overrightarrow{y_0}$ l'accélération de la pesanteur.

On suppose que les points A , I et G restent constamment dans le plan $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.

Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
 Le référentiel $\mathcal{R}_0$ est associé au sol.
 Le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, se déduit à chaque instant de $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par une rotation d'angle θ autour de l'axe $A\vec{z}_0$.

- 2.5** Où doit se situer le point G pour que ces oscillations soient possibles ? En déduire une relation entre ρ_1 et ρ_2 .
- 2.6** On désire maintenant que $\vec{AG} = -\frac{R}{4}\vec{y}_1$, déterminer la relation donnant ρ_2 en fonction de ρ_1 .
- 2.7** Déterminer la masse M du culbuto (S) en fonction de ρ_1 . En déduire m_1 et m_2 en fonction de M .

Etude cinématique :

- 2.8** Exprimer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$ du culbuto (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$.
- 2.9** Déterminer la vitesse $\vec{V}(I \in S/\mathcal{R}_0)$ du point I appartenant au culbuto (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$.
- 2.10** Déterminer la vitesse $\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}_0)$ du point A appartenant au culbuto (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$ et l'exprimer dans $\mathcal{R}_1$ en fonction de R , θ et $\dot{\theta}$.
- 2.11** Déterminer la vitesse $\vec{V}(G \in S/\mathcal{R}_0)$ du point G appartenant au culbuto (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$ et l'exprimer dans $\mathcal{R}_1$ en fonction de R , θ et $\dot{\theta}$.

Etude cinétique :

Le moment d'inertie d'un cône de masse m , de hauteur h et de demi-angle au sommet α par rapport à un diamètre de sa base est $J = \frac{mh^2}{20}(2 + 3 \tan^2 \alpha)$.

- 2.12** Déterminer le moment d'inertie J_1 du tronc de cône $\underline{1}$ par rapport à l'axe $A\vec{z}_1$ en fonction de m_1 et de R .

Le moment d'inertie de l'hémisphère $\underline{2}$ par rapport à l'axe $A\vec{z}_1$ est $J_2 = \frac{2}{5}m_2R^2$.

- 2.13** Déterminer le moment d'inertie J_S du culbuto (S) par rapport à l'axe $A\vec{z}_1$ en fonction de M et R .
- 2.14** Déterminer le moment cinétique $\vec{L}_A(S/\mathcal{R}_0)$ du culbuto (S) par rapport à $\mathcal{R}_0$ au point A en fonction de M , R , θ et $\dot{\theta}$.

Etude énergétique :

- 2.15** Déterminer l'énergie cinétique $T(S/\mathcal{R}_0)$ du culbuto (S) dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction de M , R , θ et $\dot{\theta}$.
- 2.16** Calculer la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique $T(S/\mathcal{R}_0)$.
- 2.17** Déterminer la puissance P_{ext} des actions extérieures au culbuto (S) en fonction de M , g , R , θ et $\dot{\theta}$.
- 2.18** Enoncer le théorème de l'énergie cinétique. En déduire une équation du mouvement du culbuto (S).

Fin de l'énoncé