

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

PHYSIQUE

PARTIE II

Durée : 2 heures

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

*L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est **interdit**.*

De très nombreuses parties sont indépendantes. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.

CIRCUITS ÉLECTRIQUES : ÉTUDE D'UN CÂBLE COAXIAL

Les parties **A** et **B** sont indépendantes

Partie A : câble coaxial en régime continu

Un câble est constitué de deux armatures métalliques coaxiales (axe Ox commun), séparées par un matériau isolant imparfait (figure 1) :

- l'armature interne (A_1), ou âme, est un conducteur cylindrique (plein), de conductivité σ et de rayon r_1 ;
- l'armature externe (A_2) est une enveloppe cylindrique pleine, conductrice, de conductivité σ et comprise entre deux surfaces cylindriques coaxiales, de rayons r_2 et r_3 (avec $r_2 < r_3$) ;
- la gaine d'isolant imparfait (G), de conductivité σ_g , compris entre les surfaces cylindriques de rayons r_1 et r_2 , sépare l'âme de l'armature externe.

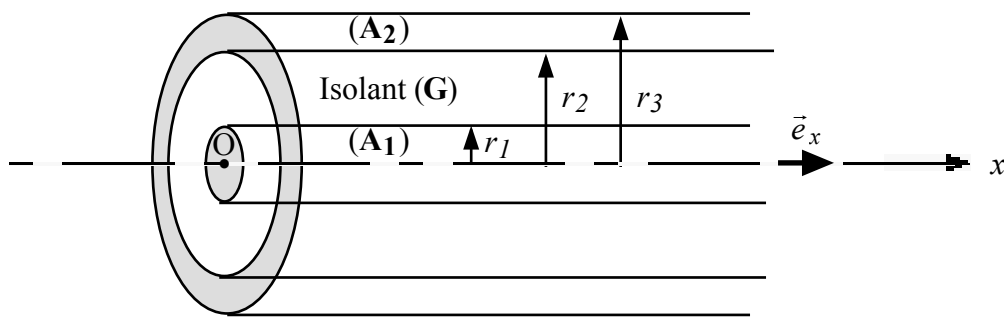


Figure 1

I. Loi d'Ohm locale

Les charges mobiles (électrons de charge $-e$) d'un conducteur métallique cylindrique, d'axe Ox orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_x$, sont animées d'une vitesse $\vec{v}$, sous l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{e}_x$ appliqué à l'instant initial $t = 0$ (avec $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$). Les électrons sont en outre soumis à une force de freinage $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, avec τ constante physique positive et m la masse de l'électron. L'action du champ de pesanteur est négligée.

- 1) Quelles peuvent être les causes de l'existence de la force de freinage ?
- 2) La vitesse $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $\vec{e}_x$. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, exprimer l'équation différentielle qui relie le vecteur $\vec{v}$ au temps t .
- 3) En déduire l'expression vectorielle du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.
- 4) Montrer que la vitesse $\vec{v}(t)$ de l'électron tend vers une valeur limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ qui dépend des grandeurs e , m , τ et $\vec{E}$.

5) *Application numérique.*

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} ; \quad m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} ; \quad \tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s} ; \quad E = 0,5 \text{ V m}^{-1}.$$

5.1. Calculer v_{lim} .

5.2. Comparer $v(t = 5\tau)$ et v_{lim} . Conclure sur la durée d'établissement du régime permanent.

6) Le régime permanent est maintenant établi : l'égalité $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \mu \vec{E}$ est vérifiée (avec μ mobilité algébrique constante des électrons). $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant électrique, et N^* est la densité particulaire des électrons (nombre d'électrons par unité de volume) dans le métal.

6.1. En rappelant la relation qui existe entre $\vec{j}$, N^* , e et $\vec{v}$, montrer que le conducteur métallique satisfait à la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, avec σ conductivité électrique du milieu.

6.2. *Application numérique.* $N^* = 6,0 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Calculer la valeur de la conductivité σ .

II. Résistance d'un conducteur cylindrique d'axe Ox

Un conducteur cylindrique d'axe Ox, de section constante S , est parcouru par un courant d'intensité I constante, et obéit à la loi d'Ohm locale. Le régime est permanent : les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont uniformes, et le phénomène de transport est unidirectionnel.

La section (disque) d'abscisse $x = 0$ est maintenue au potentiel V_0 constant. Soit $V(x)$, le potentiel de la section d'abscisse x (figure 2).

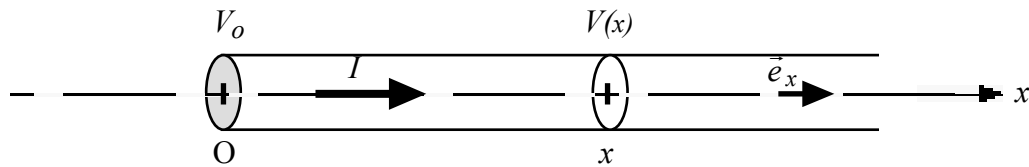


Figure 2

- 1) Rappeler la relation entre I et $\vec{j}$.
- 2) Le champ électrique dérive du potentiel V (relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$) : écrire l'équation qui lie le vecteur densité de courant $\vec{j}$ à la dérivée $\frac{dV(x)}{dx}$.
- 3) Exprimer, en fonction des grandeurs V_0 , I , σ , S et x , le potentiel $V(x)$ du conducteur, dans le plan d'abscisse x .
- 4) En déduire la résistance $R(x)$ du conducteur cylindrique compris entre les sections d'abscisses $x = 0$ et x .
- 5) Les propriétés et résultats précédents sont applicables aux armatures (A_1) et (A_2) du câble coaxial.
 - 5.1. Exprimer, en fonction de σ et r_1 , la résistance linéique λ_1 du conducteur (A_1) (résistance par unité de longueur).
 - 5.2. Déterminer, en fonction de σ , r_2 et r_3 , la résistance linéique λ_2 du conducteur (A_2).

III. Résistance de la gaine d'isolant imparfait comprise entre les deux armatures

Les armatures (A_1) et (A_2) sont considérées, **uniquement dans ce paragraphe (§. A.III)**, comme des conducteurs parfaits portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 (avec $V_1 > V_2$) uniformes et constants.

La gaine « d'isolant » homogène (G), comprise entre les armatures, se comporte comme un conducteur ohmique de faible conductivité σ_g . Il est parcouru par un courant électrique de fuite I_f . Le phénomène est à symétrie cylindrique et les effets de bord sont négligés : les lignes de courant dans « l'isolant » sont radiales (donc orthogonales à l'axe Ox) sur toute la longueur ℓ du câble et le vecteur densité de courant ne dépend que du rayon r (figure 3).

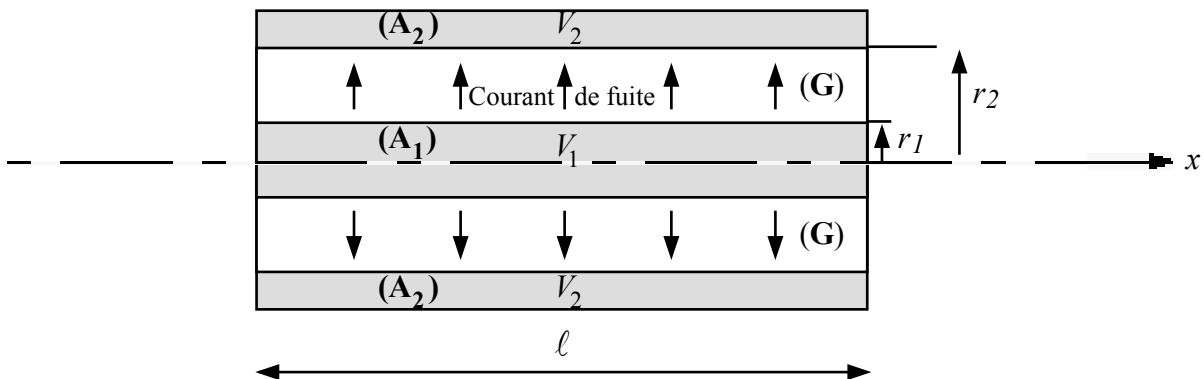


Figure 3

- 1) Le phénomène de transport étant unidimensionnel, écrire l'équation qui lie la densité de courant $j(r)$ à la dérivée $\frac{dV(r)}{dr}$.
- 2) En choisissant une surface cylindrique d'axe Ox , de longueur ℓ et de rayon r ($r_1 < r < r_2$), relier l'intensité I_f du courant de fuite à la densité de courant $j(r)$.
- 3) Sachant que la différence de potentiel $V_1 - V_2$ s'écrit sous la forme $V_1 - V_2 = RI_f$, déterminer, en fonction des grandeurs σ_g , ℓ , r_1 et r_2 , la résistance R de la gaine d'isolant, de longueur ℓ .

IV. Étude du câble coaxial

Les armatures ont à nouveau la conductivité σ , comme décrit au § A.II.5.

Dans le plan d'abscisse $x=0$, la section de l'armature interne (A_1) (disque de rayon r_1) est maintenue au potentiel $V_1(0)=V_1$ constant et la section de l'armature externe (A_2) (couronne circulaire) est maintenue au potentiel $V_2(0)=V_2$ constant, avec $V_1 > V_2$.

Dans le plan d'abscisse x , la section de l'armature (A_1) se trouve au potentiel $V_1(x)$, et la section de l'armature (A_2) présente le potentiel $V_2(x)$. Par ailleurs, toujours dans le plan d'abscisse x , ces sections sont traversées par des courants (lignes de courants parallèles à Ox), de même intensité $i(x)$, mais de sens opposés.

Soit $i(0)=i_0$, l'intensité constante du courant dans (A_1) et (A_2), à l'abscisse $x=0$.

La tranche élémentaire de câble coaxial, comprise entre les plans d'abscisse x et $x+dx$, est partiellement symbolisée par la figure 4.

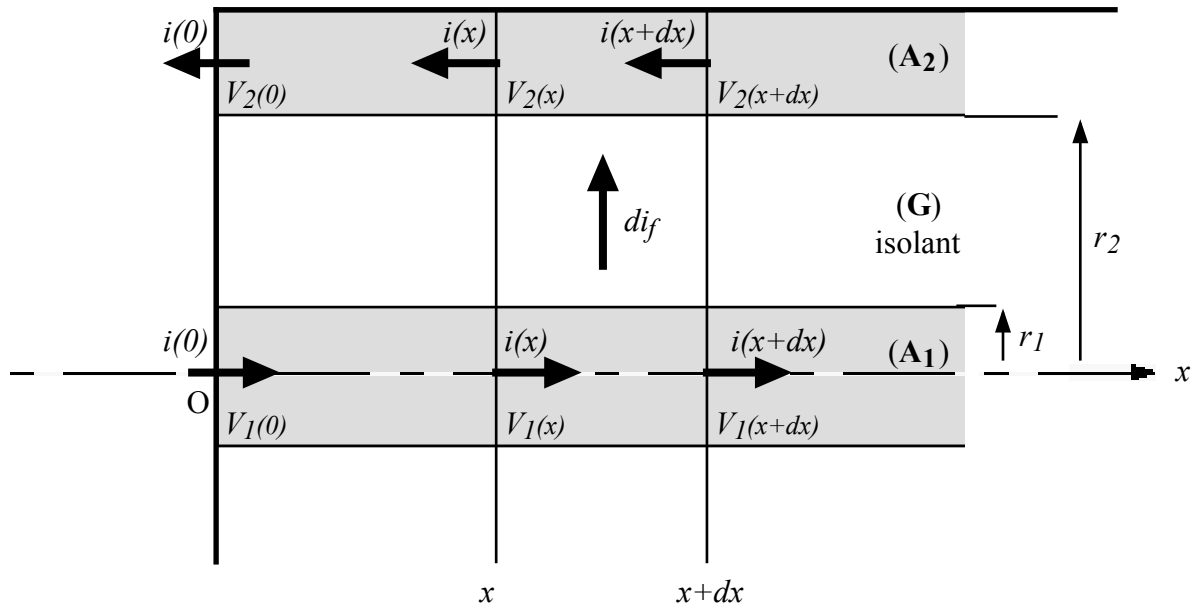


Figure 4

- 1) Exprimer, en fonction de $i(x)$ et $i(x+dx)$, le courant de fuite élémentaire di_f , dans la tranche d'épaisseur dx (figure 4).
- 2) Par application de la loi d'Ohm, dans la tranche élémentaire d'épaisseur dx , établir :
 - 2.1. une équation différentielle liant $V_1(x)$ et $i(x)$, pour l'armature (A_1) de résistance linéique λ_1 ;
 - 2.2. une équation différentielle liant $V_2(x)$ et $i(x)$, pour l'armature (A_2) de résistance linéique λ_2 ;
 - 2.3. une équation différentielle liant $V_1(x)$, $V_2(x)$ et $i(x)$, pour « l'isolant » (G).
- 3) On pose $\lambda_g = \frac{1}{2\pi\sigma_g} \ln \frac{r_2}{r_1}$. Montrer qu'en combinant les trois équations différentielles précédentes, on obtient une équation différentielle du second ordre en $i(x)$, de la forme :

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} - \omega^2 i(x) = 0.$$

Exprimer ω en fonction de λ_1 , λ_2 et λ_g .

- 4) Le câble est supposé de longueur infinie. L'intégration de l'équation différentielle précédente conduit à l'expression :

$$i(x) = I_1 e^{-\omega x} + I_2 e^{+\omega x}, \text{ avec } I_1 \text{ et } I_2 \text{ constantes d'intégration.}$$

- 4.1. Déterminer les constantes I_1 et I_2 .
- 4.2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $i(x)$.

5) La résistance de ce câble coaxial, de longueur infinie, est définie par le rapport

$$R_c = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{i(0)}.$$

5.1. Établir les expressions de $V_1(x)$ et $V_2(x)$.

5.2. Dessiner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v(x) = [V_1(x) - V_2(x)]$.

5.3. Déterminer, en fonction des grandeurs λ_1, λ_2 et λ_g , la résistance R_c .

V. Modélisation simple du câble

Le câble peut être modélisé par un circuit A_1A_2 , constitué d'une chaîne de n modules identiques comportant chacun trois résistors (résistances respectives $R/2$, $2R$ et $R/2$) (figures 5 et 6).

Un dipôle résistor X_1X_2 , de résistance $2R$, est branché en parallèle à l'extrémité de la chaîne.

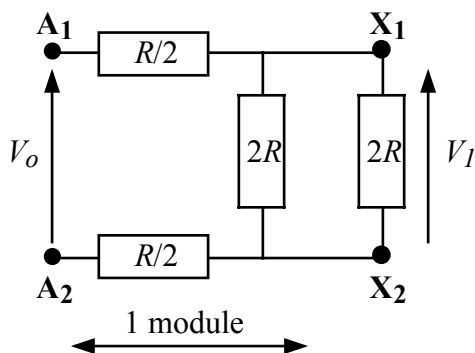


Figure 5

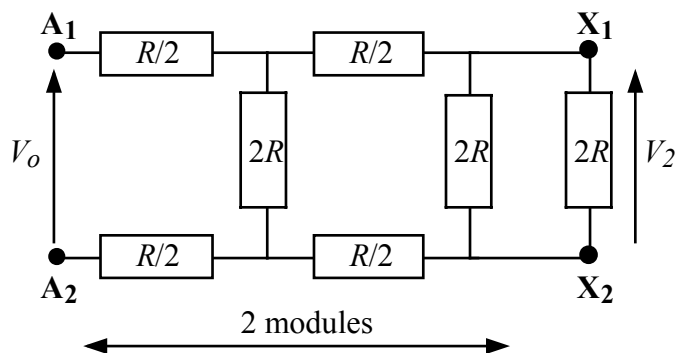


Figure 6

1) Le dipôle A_1A_2 est équivalent à un résistor.

1.1. Exprimer, en fonction de R , la résistance équivalente R_1 , dans le cas d'une chaîne ne comportant qu'un seul module (figure 5).

1.2. Même question pour la résistance équivalente R_2 , dans le cas d'une chaîne à $n = 2$ modules (figure 6).

1.3. En déduire, sur le même principe, la résistance équivalente R_n d'une chaîne à n modules.

2) Le dipôle A_1A_2 est alimenté par un générateur de tension constante $V_o = V_{A1} - V_{A2}$.

2.1. Déterminer, en fonction de V_o et R , la tension $V_1 = V_{X1} - V_{X2}$, aux bornes du résistor X_1X_2 , dans le cas d'une chaîne ne comportant qu'un seul module (figure 5).

2.2. Même question pour la tension V_2 , dans le cas d'une chaîne à $n = 2$ modules (figure 6).

2.3. En déduire, sur le même principe, la tension V_n dans le cas d'une chaîne à n modules.

2.4. En déduire la valeur V_∞ pour une chaîne de longueur infinie ($n \rightarrow \infty$).

Partie B : câble coaxial en régime sinusoïdal

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.). Le câble est alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale (signal) $v(0, t)$, en $x = 0$.

L'âme (A_1) et l'armature externe (A_2), qui présentent les résistances linéiques respectives λ_1 et λ_2 ($\Omega \text{ m}^{-1}$) et les inductances propres linéiques respectives A_1 et A_2 (H m^{-1}), constituent un condensateur de capacité linéique Γ (F m^{-1}). L'isolant imparfait (G) présente la conductivité radiale linéique $\frac{1}{\lambda_g}$ ($\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ou S m^{-1}).

À l'instant t et à l'abscisse x , $i = i(x, t)$ est l'intensité du courant qui circule dans les armatures (A_1) et (A_2), et $v = v(x, t)$ est la différence de potentiel existant entre ces dernières.

Le schéma électrique équivalent à une tranche élémentaire de ligne coaxiale, d'épaisseur dx , est représenté sur la figure 7.

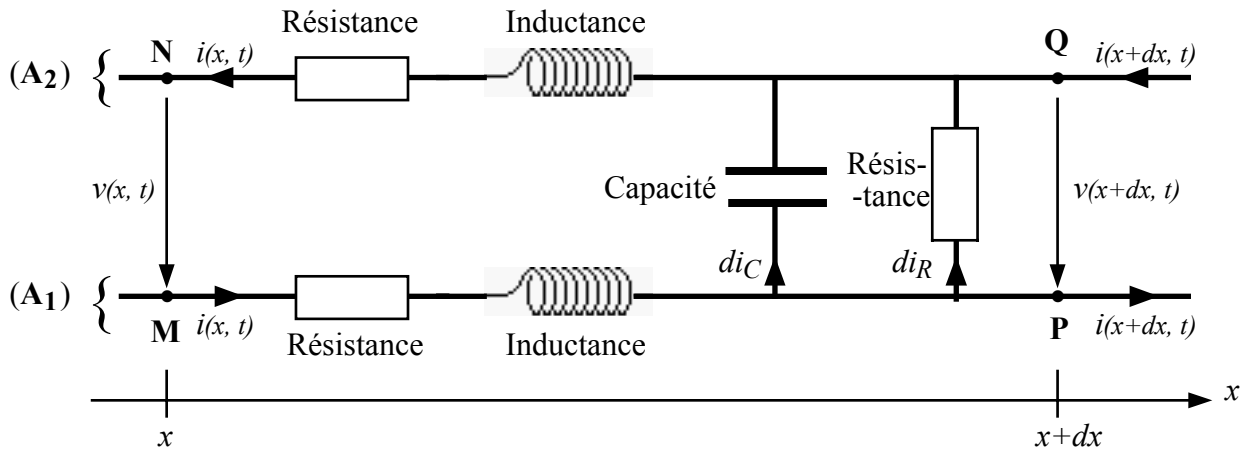


Figure 7

Le cas échéant, les développements seront limités aux termes du premier ordre.

- 1) Recopier la figure 7. La compléter en attribuant à chacun des dipôles, la valeur de sa grandeur caractéristique, en fonction des données de l'énoncé ($\lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2, \Gamma, \lambda_g$ et dx).
- 2) Soient x et $x+dx$, les abscisses respectives des points M et P de l'armature (A_1). Relier la tension $u_1(x, t) = V_P - V_M$ aux grandeurs i et $\frac{\partial i}{\partial t}$.
- 3) Même question pour la tension $u_2(x, t) = V_Q - V_N$, les points N et Q de l'armature (A_2) ayant pour abscisses respectives x et $x+dx$.
- 4) Après avoir explicité la différence de tension $v(x+dx, t) - v(x, t)$ (loi des mailles), établir la relation, notée (1), entre les grandeurs $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial i}{\partial t}$ et i .
- 5) Dans la tranche élémentaire, la gaine (G) est caractérisée par une résistance parcourue par le courant di_R et une capacité parcourue par le courant di_C (figure 7). Relier l'intensité élémentaire di_R à v , puis l'intensité élémentaire di_C à $\frac{\partial v}{\partial t}$.

- 6) Après avoir écrit la relation entre les courants $i(x+dx, t)$, $i(x, t)$, di_C et di_R (loi des nœuds), établir la relation, notée (2), entre les grandeurs $\frac{\partial i}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ et v .
- 7) Dériver l'équation (1) par rapport à l'abscisse x , et l'équation (2) par rapport au temps t . En déduire, après combinaison des relations obtenues, une équation différentielle (3) du second ordre en v , appelée équation des télégraphistes. Cette équation constitue l'équation de propagation d'une onde de tension.
- 8) À l'entrée de la ligne supposée relativement longue, en $x=0$, est établie, entre l'âme et l'armature externe, une tension sinusoïdale dont l'expression complexe est : $\underline{v}(0, t) = V_o e^{j\omega t}$. En régime forcé, la tension $v(x, t)$ entre les armatures, à l'abscisse x , est de la forme générale, en notation complexe :

$$\underline{v}(x, t) = V_1 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} + V_2 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)},$$

avec α constante positive, et V_1 et V_2 constantes réelles d'intégration.

- 8.1. Simplifier l'expression de $\underline{v}(x, t)$, en tenant compte des réalités physiques.
- 8.2. Quelles sont les principales caractéristiques de cette onde de tension ?

Fin de l'énoncé