Sommes de Riemann

Exercice 1

On cherche à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

Corrigé 1

On divise cette somme en deux sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{n^3+k^3}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot k^2}{n^3+k^3}$$

On réarange les deux sommes pour traiter des sommes de Riemann.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3} &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{n^3+k^3}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot k^2}{n^3+k^3}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{-2}+\left(\frac{k}{n}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\end{aligned}$$

On pose $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ et $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On reconnait deux sommes de Riemann, donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= 0+\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln 2\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}=\frac{1}{3}\ln 2}$$

Exercice 2

On cherche à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{p=1}^{n}\left(n^2\times p^{-\frac{4p}{n^2}}\right)$.

Corrigé 2

Le plus simple c'est de travailler avec des sommes :

$$\begin{aligned}
\ln\left(n^2\times\prod_{p=1}^{n}\left(p^{-\frac{4p}{n^2}}\right)\right) &= 2\ln n-\frac{4}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\ln p\\
&= 2\ln n-\frac{4}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\Big(\ln p-\ln n+\ln n\Big)\\
&= 2\ln n-4\ln n\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\right)-4\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\ln\left(\frac{p}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

On reconnait deux sommes de Riemann, posons : $g:x\longmapsto x$ et $f:x\longmapsto x\ln x$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}\right)=\int_0^1 x\ln x dx=-\frac{1}{4}}\text{ et }\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}g\left(\frac{p}{n}\right)=\int_0^1 x dx=-\frac{1}{2}}\qquad(*)$$

Passons maintenant aux limites, on utilisera $(*)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\ln\left(n^2\times\prod_{p=1}^{n}\left(p^{-\frac{4p}{n^2}}\right)\right) &= 2\lim_{n\to+\infty}\ln n-4\lim_{n\to+\infty}(\ln n)\times\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\right)\\
&- 4\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\ln\left(\frac{p}{n}\right)\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}n^2\times\prod_{p=1}^{n}\left(p^{-\frac{4p}{n^2}}\right)=e}$$

— Mohammed EL BACHIR —