Mohamed EL BACHIR
http://rifly01.free.fr

Année 2006-2007
17 juin 2007

Diagonalisation des matrices carrées

Exercice 1. Soit A une matrice carrée donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A,
2. Déterminer les vecteurs propres de A,
3. Ecrire A sous la forme suivante :
$$A = PDP^{-1}$$
4. Calculer A^2, A^{10},
5. Trouver une matrice B telle que $B^2 = A$,
6. Ecrire $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sous la forme $v = au_1 + bu_2, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$
7. Calculer $A^2v, A^{47}v$.

Correction 1.

1. L'équation caractéristique s'écrit :
$$\lambda^2 - \lambda \mathrm{tr} A + \det A = 0$$
Donc ici, on a :
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$
Les valeurs propres associées à A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
2. Cherchons les valeurs propres associées à A.
   (a) Pour le premier vecteur on a :
$$\begin{aligned} Au_1 = \lambda_1 u_1 &\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} 3a - 2b & = & a \\ a & = & b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & b \\ a & = & b \end{array} \right. \end{aligned}$$
   Donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Pour le second vecteur on a :
$$\begin{aligned} Au_2 = \lambda_2 u_2 &\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} 3a - 2b & = & 2a \\ a & = & 2b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 2b \\ a & = & 2b \end{array} \right. \end{aligned}$$
   Donc $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. La forme cherchée :
$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
4. On veux calculer A^2 et A^{10} :
   (a) Pour A^2, on a :
$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   (b) Pour A^{10}, on a :
$$A^2 = PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
5. On cherche B telle que $B^2 = A$, donc
$$B = \sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$$
6. On cherche un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$v = au_1 + bu_2 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a + 2b & = & 1 \\ a + b & = & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & -2 \\ b & = & 5 \end{array} \right.$$
Donc le couple $(-2, 5)$ verifie le système.
7. On cherche à calculer A^2v et $A^{47}v$.

(a) On calcule A^2v :

$$\begin{array}{rcl} A^2v & = & A^2(-2u_1 + 5u_2) \\ & = & -2A(Au_1) + 5A(Au_2) \\ & = & -2A(\lambda_1 u_1) + 5A(\lambda_2 u_2) \\ & = & -2\lambda_1(Au_1) + 5\lambda_2(Au_2) \\ & = & -2\lambda_1^2 u_1 + 5\lambda_2^2 u_2 \end{array}$$

Donc $A^2v = \begin{pmatrix} 38 \\ 18 \end{pmatrix}$

(b) On calcule $A^{47}v$:

$$A^{47}v \quad = \quad -2\lambda_1^{47}u_1 + 5\lambda_2^{47}u_2$$

Donc $A^{47}v = \begin{pmatrix} 5 \times 2^{48} - 2 \\ 5 \times 2^{47} - 2 \end{pmatrix}$