Révisions séries

1 Pour les séries

1.1 Les séries numériques

Remarque 1

Il faut savoir que :

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) &= \sin\left[\pi\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)+n\pi\right]\\ &= (-1)^n\sin\left[\pi\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)\right]\\ &= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+n^2}+n}\right)\end{aligned}$$

Remarque 2

Il faut savoir le développement limité des fonctions usuelles :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+...+x^n\epsilon(x)\\ (1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+...+x^n\epsilon(x)\\ \ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2-...+x^n\epsilon(x)\end{aligned}$$

Remarque 3

Il faut savoir ces manipulations :

$$\begin{aligned}\forall q\neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\\ \forall q\neq 1, \sum_{k=k_0}^{n} q^k &= q^{k_0}\times\frac{1-q^{n+k_0+1}}{1-q} \Longrightarrow \sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{k_0}}{1-q}\\ \text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ alors } \sum_{k=0}^{n}(u_{n+1}-u_n) &= u_{n+1}-u_0 \text{ alors } \sum_{k=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \ell - v_0\end{aligned}$$

1.2 Les suites de fonctions

Remarque 4

Il faut faire la différence entre deux types de convergences :

La convergence simple :

$$\forall x\in\mathbb{K}, \forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall n\geq N \Longrightarrow \left|(f_n-f)(x)\right|\leq\epsilon$$

La convergence uniforme :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{K}, \forall n \geq N \Longrightarrow \Big|(f_n - f)(x)\Big| \leq \epsilon$$

Remarque 5

Soit $\Big(f_n(x)\Big)_n$ une suite de fonctions.

$$\left(\begin{cases} f_n \in \mathcal{C}^0\Big([a,b]\Big) \\ f_n \text{ converge uniformément sur } [a,b] \end{cases} \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^0\Big([a,b]\Big)\right)$$

Remarque 6

Soit $\Big(f_n(x)\Big)_n$ une suite de fonctions.

$$\left(\begin{cases} f_n \in \mathcal{C}^0\Big([a,b]\Big) \\ f(x) \neq \mathcal{C}^0\Big([a,b]\Big) \end{cases} \Longrightarrow \Big(f_n(x)\Big)_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [a,b]\right)$$

Remarque 7

Soit $\Big(f_n(t)\Big)_n$ une suite de fonctions.

$$\left(\begin{cases} f_n \in \mathcal{C}^0\Big([a,b]\Big) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt\right) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{cases} \Longrightarrow \Big(f_n(x)\Big)_n \text{converge uniformément sur } [a,b]\right)$$

1.3 Les séries de fonctions

Remarque 8

Soit $\Big(f_n(t)\Big)_n$ une suite de fonctions. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{K}$, c'est étudier la convergence de la série numérique $\sum f_n$ où $x \in \mathbb{K}$ fixé.

Remarque 9

Soit $\Big(f_n(t)\Big)_n$ une suite de fonctions. Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{K}$, c'est étudier la convergence de la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty/\mathbb{K}}$ où $\|f_n(x)\|_{\infty/\mathbb{K}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{K}} |f_n(x)|$ fixé.

Remarque 10

Soit $\Big(f_n(x)\Big)_n$ une suite de fonctions.

$$\left(\begin{cases} f_n \in \mathcal{C}^0\Big(\mathbb{K}\Big) \\ \sum f_n(x) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{K} \end{cases} \Longrightarrow \text{La somme } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ est continue sur } \mathbb{K}\right)$$

Remarque 11

Soient $\Big(f_n(x)\Big)_n$ une suite de fonctions et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

$$\left(\begin{cases} f_n \text{ dérivables sur } \mathbb{K} \\ \sum f_n(x) \text{ converge simplement sur } \mathbb{K} \\ \sum f_n'(x) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{K} \end{cases} \Longrightarrow S(x) \text{ dérivable sur } \mathbb{K} \text{ et vaut } S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)\right)$$

Remarque 12

Soit $\Big(f_n(x)\Big)_n$ une suite de fonctions.

$$\left(\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in \mathcal{C}^0\Big([a,b]\Big) \\ \sum f_n(x) \text{ converge uniformément sur } [a,b] \end{cases} \Longrightarrow \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt\right)\right)$$

1.4 Les séries entières

Remarque 13

On appelle rayon de convergence (RCV) la quantité $R \in [0, +\infty]$ définie par

$$R = \sup\Big\{r \geq 0, \sum a_n z^n \text{ converge}\Big\}$$

Remarque 14

Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

$$\begin{aligned} R &= \sup\Big\{r \geq 0, \Big(a_n z^n\Big)_n \text{ est bornée}\Big\} \\ &= \sup\Big\{r \geq 0, \lim_{n\to+\infty} \Big(a_n r^n\Big) = 0\Big\} \end{aligned}$$

Remarque 15

Pour calculer le rayon de convergence, il faut

- Soit regarder quand $\Big(|a_n| r^n\Big)_n$ est bornée.
- Soit claculer la quantité $\forall a_n \neq 0, \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0, +\infty]$. Alors $R = \frac{1}{\ell}$

Remarque 16

Il faudra connaître le développement en série de quelques fonctions usuelles :

$$\begin{aligned}\forall |X| < 1, -\ln(1-X) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{X^p}{p} \\ \forall |X| < 1, \frac{1}{1-X} &= \sum_{p=0}^{+\infty} X^p\end{aligned}$$

Remarque 17

Soit $\Phi = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R sont rayon de convergence.

1. Φ converge absolument si $|z| < R$.
2. $\left(a_n z^n\right)_n$ est bornée si $|z| < R$.
3. Pour tout $\epsilon > 0$, la convergence de Φ est normale sur l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R - \epsilon\right\}$.

— Mohammed EL BACHIR —