

## Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants

**Méthode 1.** Le type d'équations différentielles auxquelles on s'intéresse sont de la forme suivante :

$$y'' - \alpha y' - \beta y = 0 \quad (\text{H})$$

Où  $\alpha, \beta$  sont deux constantes. Voici les grandes étapes à suivre :

1. Déterminer les racines de l'équation caractéristique (idem : polynôme caractéristique) associée :

$$r^2 - \alpha r - \beta = 0 \quad (\text{C})$$

2. Le cas de  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ .

- Lorsque l'équation caractéristique (C) admet deux racines distinctes  $\lambda, \mu$ , toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$y(t) = k_1 \cdot e^{\lambda t} + k_2 \cdot e^{\mu t}, \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ deux constantes complexes}$$

- Lorsque l'équation caractéristique (C) admet une racine double  $\lambda = \frac{\alpha}{2}$ , toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 \cdot t) e^{\lambda t}, \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont des constantes complexes}$$

3. Le cas de  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

- Lorsque l'équation caractéristique (C) admet deux racines réelles distinctes  $\lambda, \mu$ , toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = k_1 \cdot e^{\lambda t} + k_2 e^{\mu t}, \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont constantes réelles}$$

- Lorsque l'équation caractéristique (C) admet une racine double réelle  $\lambda = \frac{\alpha}{2}$ , toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 \cdot t) e^{\lambda t}, \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont constantes réelles}$$

- Lorsque l'équation caractéristique (C) admet deux racines complexes conjuguées  $\lambda = a + ib$  et  $\bar{\lambda} = a - ib$ , toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$y(t) = (k_1 \cdot \cos(bt) + k_2 \cdot \sin(bt)) e^{at}, \quad \text{où } k_1, k_2 \text{ sont constantes réelles}$$

## Pour les équations différentielles ayant un second membre

Pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre, on prend :

1. essayer de deviner une telle solution ;

2. décomposer le second membre en une somme de fonctions plus simple et appliquer le principe de superposition ;
3. lorsque l'on connaît une solution de l'équation homogène associée qui ne s'annule pas, utiliser la méthode de variation de la constante ;
4. lorsque l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée, utiliser la méthode de variation des deux constantes.

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1.  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ,
2.  $y'' - 6y' + 9y = 0$ ,
3.  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

**Corrigé 1.** Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle est donnée par  $(r + 3)(r - 7) = 0$ .  
La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$y(t) = k_1 \cdot e^{-3t} + k_2 \cdot e^{7t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

2. Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle est donnée par  $(r - 3)^2 = 0$ .  
La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$y(t) = (k_1 + k_2 \cdot t)e^{3t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

3. Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle s'écrit  $(r - (1 - i))(r - (1 + i)) = 0$ .  
La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$y(t) = (k_1 \cdot \cos t + k_2 \cdot \sin t)e^t \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$