

Résoudre un système différentiel

Exercice 1

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Avec $\dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt}$.

Corrigé 1

Le système s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} = \mathcal{A}X \text{ avec } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice $\mathcal{A}$ admet pour valeur propre : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$. Les vecteurs propres associés

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La solution du système est $C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1 = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t} \\ x_2 = 2C_1 + C_2e^t \\ x_3 = -C_1 - C_3e^{2t} \end{cases}$$

Avec C_1, C_2, C_3 des constantes réelles arbitraires.