

Révisions : Examens et concours

Mathématiques

1 Analyse

1.1 Intégrales de Riemann

Théorème 1.1

Les intégrales de Riemann sont de la forme

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right) \quad \text{avec } f \text{ une fonction continue}$$

1.2 Intégration par parties

Théorème 1.2

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

1.3 Changement de variable

Théorème 1.3

Soit f une fonction continue sur $[c, d]$ et si u une fonction bijective de $[a, b]$ dans $[c, d]$ de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{u^{-1}(c)}^{u^{-1}(d)} f(u(t))u'(t)dt$$

1.4 Forme d'intégrales dépendants d'un paramètre

Forme 1

Voici la forme d'une **intégrale dépendant d'un paramètre**

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt \quad \text{avec } a, b \text{ fixés}$$

1.5 Forme de fonctions définies par une intégrale

Forme 2

Voici des exemples de **fonctions définies à l'aide d'une intégrale**.

$$G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t^2 + x^2} dt \quad , \quad H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

Pour H : Si u, v sont dérivables et f continue alors H est dérivable, il suffit de revenir à un calcul explicite de H . Si F est une primitive de f alors

$$H(x) = F(v(x)) - F(u(x)) \implies H'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

1.6 Etude d'une fonction définie par intégrale

Méthode 1.1

On veut étudier la fonction G définie par

$$G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t^2 + x^2} dt$$

Faisons un changement de variable pour se ramener à des bornes constantes

$$0 \leq t \leq x^2 \text{ dans le cas général } (u(x) \leq t \leq v(x))$$

On écrit $t = x^2 s$ et $dt = x^2 ds$ avec $s \in [0, 1]$. Dans le cas général, on aurait pu écrire :

$$\begin{cases} t &= u(x) + s(v(x) - u(x)) \\ dt &= (v(x) - u(x)) ds \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq s \leq 1$$

Ainsi :

$$G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t^2 + x^2} dt = \int_0^1 \frac{x^2 ds}{(sx^2)^2 + x^2} = \int_0^1 \frac{ds}{1 + s^2 x^2}$$

1.7 Intégrales triples

Exercice 1

Calculer $I_\alpha = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$ où $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, a, b \in \mathbb{R}_+\}$

Exercice 2

$\mathcal{D}$ en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\mathcal{D} = \{(\rho, \phi, \theta); a \leq \rho \leq b; -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^{2-2\alpha} d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = 4\pi \frac{b^{3-2\alpha} - a^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq \frac{3}{2} \\ &= 4\pi \ln \frac{b}{a} \quad \text{si } \alpha = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.8 Les équations différentielles

Dans cette partie, on va se restreindre au programme du concours.

2 Algèbre

2.1 Exemple d'utilisation du pivot de Gauss

Méthode 2.1

Soit un système donné par :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ 2\beta - 3\gamma & = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma & = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système en utilisant la méthode de Gauss.

Notons qu'on peut écrire le système de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilisant le Pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ 2\beta - 3\gamma & = 0 \\ 5\gamma & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 7/10 \\ \beta & = 3/10 \\ \gamma & = 1/5 \end{cases}$$

2.2 Les applications linéaires

Méthode 2.2

Si f est une application linéaire alors il existe une matrice pour la représenté

2.3 Déterminer le noyau d'une application linéaire

Définition 2.1

Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Le noyau de cette application linéaire est défini comme suit :

$$\ker f = \left\{ x \in \mathbb{E}, f(x) = 0_{\mathbb{F}} \right\} \iff \left\{ \exists x_0 \in \mathbb{E}, f(x_0) = 0_{\mathbb{F}} \right\}$$

On note que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Noter aussi que $\ker f \subset \mathbb{E}$.

Théorème 2.2

Un théorème important

$$f \text{ est injective} \iff \ker f = \{0_{\mathbb{E}}\}$$

2.4 Application linéaire et isomorphisme

Théorème 2.3

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{R}$ –espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$

$$\phi \text{ est isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ dans } \mathbb{F} \iff \ker(\phi) = \{0\} \text{ et } \text{Im}(\phi) = \mathbb{F}$$

Dans ce cas, l'application réciproque ϕ^{-1} existe et appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

2.5 Déterminer l'image d'une application linéaire

Définition 2.4

Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$ –espaces vectoriels et f une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Le noyau de cette application linéaire est défini comme suit :

$$\text{Im} f = \left\{ f(x), x \in \mathbb{E}, \right\} \iff \left\{ \exists x \in \mathbb{E}, y = f(x) \right\}$$

Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{E}$, alors $\text{Im} f = \text{vect} \left\{ f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \right\}$.

Noter aussi que $\text{Im} f \subset \mathbb{F}$.

2.6 Deux sous-espaces vectoriels supplémentaires

2.7 Déterminer le sous-espace vectoriel à partir d'une partie

Exercice 3

Soit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel, déterminer le sous-espace vectoriel engendré par la partie suivante :

$$P_1 = \left\{ (1, 1, 1); (0, 2, 3) \right\}$$

Corrigé 1

$F_1 = \text{Vect}(P_1)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \lambda = x \\ \mu = \frac{1}{2}(y - x) \\ z = x + \frac{3}{2}(y - x) \end{cases}$$

$$\iff x - 3y + 2z = 0$$

En conclusion :

$$F_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - 3y + 2z = 0 \right\}$$

2.8 Déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le réel $\lambda = -1$ est une valeur propre,
2. Trouver le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$,
3. Donner une base de ce sous-espace propre $\mathcal{P}$.

Corrigé 2

1. On a $\mathcal{M}(f) - \lambda I_3 = \mathcal{M}(f) + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, donc $\det(\mathcal{M}(f) + I_3) = 0$.

D'où, $\lambda = -1$ est une valeur propre de f .

2. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda = -1$, on a :

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 4x + 3y - 2z = 0 \\ 8x + 6y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff 4x + 3y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Le sous-espace propre associé à $\lambda = -1$ est donc le plan d'équation $4x + 3y - 2z = 0$.

3. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$. Comme $z = x + \frac{3}{2}y = x + \alpha y$, on en déduit que $u = (x, y, x + \alpha y)$

ou encore $u = x(1, 0, 1) + y(0, 1, \alpha)$. Ainsi tout élément $u \in \mathcal{L}$ est combinaison linéaire de $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et de $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, Par ailleurs, la famille (a, b) est libre et par suite elle est une base de $\mathcal{P}$

Table des matières

1	Analyse	1
1.1	Intégrales de Riemann	1
1.2	Intégration par parties	1
1.3	Changement de variable	1
1.4	Forme d'intégrales dépendants d'un paramètre	1
1.5	Forme de fonctions définies par une intégrale	1
1.6	Etude d'une fonction définie par intégrale	2
1.7	Intégrales triples	2
1.8	Les équations différentielles	2
2	Algèbre	3
2.1	Exemple d'utilisation du pivot de Gauss	3
2.2	Les applications linéaires	3
2.3	Déterminer le noyau d'une application linéaire	3
2.4	Application linéaire et isomorphisme	4
2.5	Déterminer l'image d'une application linéaire	4
2.6	Deux sous-espaces vectoriels supplémentaires	4
2.7	Déterminer le sous-espace vectoriel à partir d'une partie	4
2.8	Déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre	5