Equations aux dérivées partielles

Voici une méthode générale pour résoudre une équation aux dérivées partielles. En ayant l'expression du changement de variable adéquat.

Exercice 1

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y \qquad (*)$$

En effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} u &= x \\ v &= x+2y \end{cases}$$

Corrigé 1

Soit

$$\phi : \begin{cases} u &= x \\ v &= x+2y \end{cases} \iff \phi^{-1} : \begin{cases} x &= u \\ y &= \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

(u,v) possède un antécédent et un seul par ϕ. ϕ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $F(u,v) = f\left(u, \dfrac{v-u}{2}\right) = f(x,y)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{puisque } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{puisque } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \end{aligned}$$

En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$2\frac{\partial F}{\partial u} = x^2 y \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{x^2 y}{2} = \frac{u^2}{2}\frac{v-u}{2} = \frac{u^2 v - u^3}{4}$$

En intégrant partiellement en u

$$F(u,v) = \Phi(v) + \frac{1}{12}u^3 v - \frac{1}{16}u^4 \text{ avec } \Phi \text{ une fonction de classe } \mathcal{C}^1$$

La solution de $(*)$, sur tout ouvert $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^4 + x^3 y + \Phi(x+2y) \text{ avec } \Phi \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1$$

— Mohammed EL BACHIR —