

Exercice 1

Déterminer la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(E) : f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1$

Corrigé 1

Supposons qu'une telle fonction f existe. La fonction $t \mapsto tf(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(t)dt + 1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

En dérivant les deux membres de (E) on obtient $(E') : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xf(x)$. La fonction f est, par conséquent, solution de l'équation différentielle linéaire $y' = xy$ dont la solution est :

$$x \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^x t dt\right) = \lambda \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x par 0 dans l'équation, on obtient la condition $f(0) = 1$ qui implique $\lambda = 1$.

Donc $f : x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ est la seule solution de possible.

Réciproque : On vérifie immédiatement que f satisfait la condition (E) , f est donc l'unique solution