Exercice 1

Etude d'une série

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$.

2. Montrer que la suite de terme général $\frac{\ln n}{n}$ est monotone à partir d'un certain rang que l'on précisera.

   En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

3. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est-elle absolument convergente ?

4. Calculer $\int_a^b \frac{\ln t}{t} dt$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Extrait : CCP - 2007

Corrigé 1

1. Posons $a_n = \frac{\ln n}{n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell = 1$. Donc $R = \ell = 1$.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Calculons la dérivée de f.

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad \text{et} \qquad f'(x_0) = 0 \iff 1 - \ln x_0 = 0 \iff x_0 = e$$

   Par suite, f est monotone (décroissante) à partir de x_0, c'est-à-dire, décroissante sur $[e, +\infty[$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n \ln n}{n} = (-1)^n \left|\frac{\ln n}{n}\right|$ donc il s'agit d'une série alternée. De plus a_n décroit et tend vers 0. Par conséquent, la série converge par le théorème des séries alternées.

3. a_n s'écrit également comme $a_n = \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n(\ln n)^{-1}}$ et par comaparaison aux séries de bertrand $\Big($avec comme paramètres $\alpha = 1$ et $\beta = -1\Big)$ ainsi, on peut conclure à la divergence de la série.
   Une série $\sum u_n$ est absolument convergente, si et seulement si, $\sum |a_n|$ est convergente.
   Ici $\left|\frac{(-1)^n \ln n}{n}\right| = \frac{\ln n}{n}$ qui est le terme général d'un série divergente. Donc la série n'est pas absolument convergente. (On dit qu'elle est semi-convergente)

4. Soit $b > a > 0$, on a :

   $$\int_a^b \frac{\ln t}{t} dt = \int_a^b u'(t)u(t)dt = \left[\frac{u^2(t)}{2}\right]_a^b = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_a^b = \frac{(\ln b)^2 - (\ln a)^2}{2}$$

Mohammed EL BACHIR