Qu'est ce qu'une suite de Cauchy ?

Définition. La définition formelle d'une suite de Cauchy est la suivante :

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q > n_0$ on a $|x_q - x_p| < \epsilon$

Proposition. Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est vraie.

Exercice. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme générale $x_n = \dfrac{3n}{4n+5}$

Montrer, en utilisant la définition de la suite de Cauchy, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction.

$\forall n > p > n_0, |x_n - x_p| = \left|\dfrac{3n}{4n+5} - \dfrac{3p}{4n+5}\right| = \dfrac{15(n-p)}{(4n+5)(4p+5)} \leq \dfrac{15}{4(4p+5)} < \dfrac{1}{n_0}$

car $n \geq p \Longrightarrow n - p \leq n$ et $4n + 5 < 4n$.

Ainsi, $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ converge.