Suites adjacentes

1 Définition et théorème

Définition 1.1

Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
3. Pour tout n, $u_n \leq v_n$.
   Ce qui veut dire :
   $$v_0 \leq v_1 \leq ... \leq v_n \leq w_n \leq ... \leq w_1 \leq w_0$$
4. Si n tend vers ∞, alors $(v_n - u_n)$ tend 0.

Théorème 1.2

Deux suites adjecentes convergent, et elles ont la même limite.

2 Application

Exercice 2.1

Soit deux suites de réels (v_n) et (w_n) adjacentes c'est à dire : (v_n) est croissante, (w_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que,
$$\forall n \geq n_0, v_n \leq w_n + 1$$
En déduire que la suite (v_n) est majorée.

b. Montrer de même que la suite (w_n) est minorée.

c. En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et convergent vers la même limite réelle.

Démonstration : **a.** En traduisant la dernière proposition de l'énoncé, on peut écrire :

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, |v_n - w_n| \leq \epsilon$$

En posant $\epsilon = 1$ On a immédiatement $v_n \leq w_n + 1$.

Donc $\forall n \geq n_0$:

$$v_0 \leq v_1 \leq ... \leq v_n \leq w_n + 1 \leq ... \leq w_1 + 1 \leq w_0 + 1$$

Ainsi, (v_n) est majorée par $w_0 + 1$.

b. De la propriété précédente, (w_n) est minorée par v_0.

c. (v_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (w_n) est décroissante et minorée donc convergente.

Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de (v_n) et (w_n).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) - \lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = \ell - \ell' = 0 \Longleftrightarrow \ell = \ell'$

(v_n) et (w_n) sont convergente, et elles ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. ■

— Mohammed EL BACHIR —