

Règle de Raabe-Duhamel

1 Définition de la règle

Règle 1.1

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[\text{ tel que } \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

1. Si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum w_k$ diverge
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum w_k$ converge

2 Application

Exercice 1

Déterminer la nature la série de terme général suivant :

$$a_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

Démonstration : On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right)^{-1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \longrightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Mais

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, la série diverge. ■

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général suivant :

$$b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Démonstration : On a :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2(n+1))!}{2^2 2^n ((n+1)!)^2} \times \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \longrightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Mais

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left[1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, la série diverge. ■

Exercice 3

Déterminer la nature de la série de terme général suivant :

$$c_n = \frac{a(a+1) \times \dots \times (b+n-1)}{b(b+1) \times \dots \times (b+n-1)}$$

Démonstration : On a :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{a(a+k)}{b(b+k)}\right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a(a+k)}{b(b+k)}\right)^{-1} = \frac{a+n}{b+n} \longrightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Mais

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left[1 - \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{b-a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel, il y a deux cas à distinguer :

1. Si $b - a > 1$ alors la série converge.
2. Si $b - a \leq 1$ alors la série diverge. ■

Exercice 4

Déterminer la nature de la série de terme général suivant :

$$d_n = \prod_{p=1}^n \left(1 - \exp\left(\frac{1}{p}\right)\right)$$

Démonstration : On a

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 2 - \exp\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Mais

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 2 - \exp\left(\frac{1}{n}\right) = 2 - \left[1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = 1 \leq 1$, la série diverge. ■

Exercice 5

Déterminer la nature de la série de terme général suivant :

$$e_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Démonstration : On a

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \sqrt{\frac{(n+1)!}{n!}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{n+1}}\right) = \sqrt{n+1} \left[\frac{x}{\sqrt{n+1}} + \epsilon_n \right] = x \quad (\epsilon_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty)$$

Il y a trois cas à distinguer :

1. Si $x > 1$ alors la série $\sum e_n$ diverge (Par le critère de d'Alembert).
2. Si $x < 1$ alors la série $\sum e_n$ converge (Par le critère de d'Alembert).
3. Si $x = 1$, le critère d'Alembert ne permet pas de conclure. Mais

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \sqrt{n+1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sqrt{n+1} \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{6(n+1)\sqrt{n+1}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \right]$$

Donc

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{6} \leq 1$, la série $\sum e_n$ diverge. ■