

Qu'est ce qu'une norme ?

Proposition. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\|\cdot\| : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

est une norme si :

1. $\left(\forall x \in \mathbb{E}, \|x\| \geq 0_{\mathbb{E}} \right)$ et $\left(\|x\| = 0_{\mathbb{E}} \iff x = 0_{\mathbb{E}} \right)$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}, \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{E} :$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Remarque. Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.

Remarque. La boule unité associée à une norme N vérifie :

$$B_u = \left\{ x \in \mathbb{E} \text{ tel que } N(x) \leq 1 \right\}$$

— Mohammed EL BACHIR —