Mohamed EL BACHIR
`http://rifly01.free.fr`

Année 2006-2007
24 mai 2007

Intégrales de Wallis et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Exercice 1. Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t dt$$

1. Montrer que pour tout n,
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$
2. Montrer que pour tout n,
$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$$
3. Montrer que pour tout n,
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$
4. Montrer que la suite $\sqrt{n}I_n$ est convergente et calculer sa limite.
5. Montrer que pour tout réel u et tout entier naturel n :
$$u \geq -n \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$$
6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$\forall t \in [0, \sqrt{n}] \qquad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$$
7. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose
$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$$
Déduire de la réponse 6) un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
8. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Correction 1. 1. Intégrons par parties l'intégrale :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+2} t dt$$

$$\begin{cases} u'(t) = \cos t & u(t) = \sin t \\ v(t) = \cos^{n+2} t & v'(t) = -(n+1) \sin t \cos^n t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t cos^n t dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^n t dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

D'où : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$

2. En multipliant par I_{n+1} les deux membres de l'égalité précédente, on obtient :

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$$

La suite $\left((n+1)I_{n+1}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, or : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$$

3. On sait que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos t \leq 1$ et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}, \cos^{n+1} t \leq cos^n t$.
On en ddéduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

C'est-à-dire $I_{n+1} \leq I_n$: la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} \leq I_{n+1}$$

En multipliant les deux membres par $n+2$, on obtient :

$$(n+2)I_{n+2} \leq (n+2)I_{n+1}$$

D'où : $(n+1)I_n \leq (n+2)I_{n+1}$
En définitive, on a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

4. D'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$$

Ce qui signifie que I_{n+1} est équivalent à I_n quand $n \longrightarrow +\infty$. De la relation 2), on déduit que nI_n^2 est équivalent à $\dfrac{\pi}{2}$. La suite $\left(\sqrt{n}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

5. Pour tout réel $x \in \Big[-1, +\infty\Big[, \quad \ln(1+x) \leq x$.
On a donc pour tout entier n et tout réel $u \geq -n$:
$\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right) \leq \dfrac{u}{n}$, d'où :

$$n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right) \leq u \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$$

6. Pour $t \in \left[0, \sqrt{n}\right]$, on peut appliquer l'inégalité précédente au réel $u = -t^2$:

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leq e^{-t^2}$$

ainsi qu'au réel $u = t^2$:

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}$$

d'où l'on déduit en passant aux inverses :

$$e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$$

En définitive, on a montré que :

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$$

7. En intégrant sur le sugment $\left[0, \sqrt{n}\right]$, on déduit :

$$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq I_n$$

où :

$$K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \quad , \quad L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt$$

Dans K_n, effectuons le changement de variable : $t = \sqrt{n}\sin u$ et $dt = \sqrt{n}\cos u du$:

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n+1} u du = \sqrt{n} I_{2n+1}$$

Dans L_n, effectuons le changement de variable : $t = \sqrt{n}\tan u$ et $dt = \dfrac{\sqrt{n}}{\cos^2 u}du$.

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n-2} u du \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

En définitive :

$$\sqrt{n} I_{2n-2} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

8. On sait que I_{2n+1} et I_{2n-2} sont équivalents à : $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$