
Suite de Fibonacci

Exercice 1. Déterminer une formule explicite pour cette suite :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 &= 0 \\ \mathcal{F}_1 &= 1 \\ \mathcal{F}_{n+2} &= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \end{cases}$$

Correction 1. On a l'équation de récurrence :

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

L'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Ainsi : $\Delta = 1 + 4 = 5$ d'où les deux solutions :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout entier naturel,

$$\mathcal{F}_n = \mu_1 \varphi^n + \mu_2 \varphi'^n$$

Or,

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{F}_0 = 0 \\ \mathcal{F}_1 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \varphi \mu_1 - \varphi' \mu_2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

Finalement, On a, pour tout entier naturel, $\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \varphi'^n \right)$