Mohamed EL BACHIR
http://rifly01.free.fr

Année 2006-2007
16 juin 2007

Les matrices

Exercice 1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de la matrice A_α en discutant selon les valeurs de α.
2. Montrer qu'elle est inversible si et seulement si $\alpha \neq 1$.

Correction 1. 1. On cherche le déterminant de A_α,

$$A_\alpha = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1+\alpha \\ 1 & 1+\alpha & 2+\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1+\alpha) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2+\alpha \end{vmatrix} = 1+\alpha$$

   (a) Si $\alpha \neq -1$, alors $\mathrm{rg} A_\alpha = 3$
   (b) Si $\alpha = -1$, alors $\mathrm{rg} A_\alpha = 2$ car $C_3 + C_2 = C_1$

2. A_α est inversible $\Longleftrightarrow \det A_\alpha \neq 0$ donc si et seulement si $\alpha \neq -1$.