
Trouver les Δ des équations

I Une équation de second ordre

Une équation de second ordre s'écrit :

$$P(X) = aX^2 + bX + c = 0$$

$P(X) = 0$ a une racine double, si et seulement si,

$$P'(\alpha) = 2a\alpha + b = 0 \iff \alpha = -\frac{b}{2a}$$

De plus, $P(\alpha) = 0$ admet deux racines distinctes réelles, si et seulement si,

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\iff a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ &\iff a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \\ &\iff \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0 \\ &\iff b^2 - 4ac = 0 \end{aligned}$$

II Une équation d'ordre 3

Une équation d'ordre 3 s'écrit :

$$P(X) = X^3 + pX + q = 0$$

Les seules valeurs possibles pour que $P(X) = 0$ ait une racine double,

$$P'(\alpha) = 3\alpha^2 + p = 0 \iff \alpha_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ ou } \alpha_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ avec } p \leq 0$$

De plus, $P(\alpha) = 0$ admet une racine double, si et seulement si,

$$\begin{aligned} P(\alpha_1) = 0 &\iff \alpha_1^3 + p\alpha_1 + q = 0 \\ &\iff \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + q = 0 \\ &\iff \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha_2) = 0 &\iff \alpha_2^3 + p\alpha_2 + q = 0 \\ &\iff \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + q = 0 \\ &\iff q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\alpha_1) \times P(\alpha_2) = 0 &\iff \left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 0 \\
&\iff q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0 \\
&\iff 27q^2 + 4p^3 = 0
\end{aligned}$$