
Résoudre une équation complexe

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante, d'inconue $z \in \mathbb{C}^*$:

$$z^n - 1 = 0$$

Exercice 2. Que dire de $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

Correction 1. On a pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} z^n - 1 &\iff z^n = 1 \\ &\iff z^n = e^{2ik\pi} \quad \text{tel que } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{tel que } k = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Correction 2. On a pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \quad \text{car } z^n = 1$$