# Formule de John Machin

**Exercice 1**

Le but de cet exrecice est de démontrer la formule de **John Machin**.

On pourrait expoiter la formule suivante :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

1. Calculer $A = \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ puis $B = \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$. On donnera les résultats sous forme de rationnels.
2. Calculer $C = \tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire la formule suivante :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

**Corrigé 1**

1. Calculons $A$ et $B$

$$A = \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \text{ et } B = \frac{2A}{1-A^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

2. Calculons $C$

$$C = \frac{B - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + B\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

Or

$$\arctan C = \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \Longleftrightarrow 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Mohammed EL BACHIR