Intégration : Théorèmes du cours

I Intégration sur intervalle quelconque

Théorème 1. Inégalité de la moyenne

Si f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{K} = [a, b]$. S'il existe m et M tels que pour tout $t \in \mathbb{K}$

$$m \leq f(t) \leq M \qquad \text{alors} \qquad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

Théorème 2. Egalité de la moyenne

Si f une fonction continue sur $\mathbb{K} = [a, b]$, alors il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que

$$\Big(b-a\Big) f(c) = \int_a^b f(t)dt \Longleftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Théorème 3. Intégrale dépendant d'un paramètre : Continuité sur un segment

Si $t \longmapsto f(x, t)$ une fonction continue sur $\mathbb{K} \times [a, b]$, alors F est continue sur $\mathbb{K}$.

Théorème 4. Intégrale dépendant d'un paramètre : Dérivabilité

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{K} \times [a, b]$, alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{K}$ et $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

Théorème 5. Une condition de convergence.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.

Théorème 6. Changement de variable

Si f est continue sur $[c, d]$ et si u une fonction bijective de $[a, b]$ dans $[c, d]$ et de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_c^d f(z)dz = \int_{u^{-1}(c)=a}^{u^{-1}(d)=b} f\Big(u(t)\Big) \cdot u'(t)dt$$

On dit alors qu'on a fait le changement de variable $z = u(t)$.

Théorème 7. Convergence dominée

On se donne une suite de fonctions $\Big(f_n\Big)_n$.

- Les suites de fonctions f_n sont continues sur tout segment $\mathbb{K}$,
- f_n converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment $\mathbb{K}$,
- S'il existe une fonction h continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, \Big|f_n(t)\Big| \leq h(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b h(t)dt \text{ est convergente}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ est absolument convergente, donc convergente, ainsi que

$$\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} \Big(f_n(t)\Big)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Théorème 8. Résultats de continuité

On se donne f, une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{K} \times [a, b]$.

- Pour tout $t \in [a, b]$, $x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{K}$,
- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $t \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$,
- Il existe une fonction h continue par morceaux sur tout segment de $[a, b]$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \forall t \in [a, b], \Big|f(x, t)\Big| \leq h(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b h(t)dt \text{ est convergente}$$

Alors $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)dt$ est définie (intégrable) et continue sur $\mathbb{K}$.

Théorème 9. Résultats de dérivabilité

On se donne f, une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{K} \times [a, b]$.

- Pour tout $t \in [a, b]$, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{K}$,
- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est continue sur $[a, b]$,
- Il existe une fonction h continue par morceaux sur tout segment de $[a, b]$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \forall t \in [a, b], \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq h(t) \quad \text{et} \quad \int_a^b h(t)dt \text{ est convergente}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $t \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(x, t)dt$ converge,

Alors $\forall x \in \mathbb{K}, F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{K}$ et $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

II Intégrales doubles

Théorème 10. Domaine quarrable (1)

Soit f une fonction continue bornée sur un domaine Ω quarrable alors f est intégrable sur le domaine Ω.

Théorème 11. Domaine quarrable (2)

Soit f une fonction bornée sur Ω, un domaine quarrable du plan, continue sauf sur un ensemble de points D. Si D quarrable d'aire nulle alors f est intégrable sur Ω.

Théorème 12. Formule de Fubini

On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telle que

$$\forall t \in [a, b] \text{ on a } \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$$

On considère le domaine

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\Big\}$$

Alors le domaine Ω est quarrable et pour toute fonction f intégrable sur Ω, on vérifie

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right) dx$$

Si de plus, il existe deux fonctions Φ_1 et Φ_2 continues sur un segment $[c, d]$ telle que

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ c \leq y \leq d,\ \Phi_1(y) \leq x \leq \Phi_2(y)\Big\}$$

Alors

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Phi_1(y)}^{\Phi_2(y)} f(x, y)dx\right) dy$$

Théorème 13. Changement de variable et détermiants

On considère une fonction F telle que

$$F\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ et } (x, y) \to \Big(u(x, y), v(x, y)\Big)$$

On supposera que $F \in \mathcal{C}^1\Big(\mathbb{R}^2\Big)$ et on définit le jacobien par

$$\frac{1}{J_F(x, y)} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Théorème 14. Formule de changement de variable

Soit Ω un esnemble fermé, borné, quarrable du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe $\mathcal{C}_1$. On suppose que pour tout $(x, y) \in \Omega,\ J_F(x, y) \neq 0$. On vérifie alors :

$$\iint_\Omega f(F(x, y))\,|J_F(x, y)|\,dxdy = \iint_{\Omega_1} f(u, v)dudv$$

III Intégrales triples

Théorème 15. Formule de Fubini totale

On suppose qu'il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 continues définies sur $[a, b]$ telles que

$$c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$$

De plus, on suppose qu'il existe deux fonctions Φ_1 et Φ_2 continues sur $[a, b] \times [c, d]$ telles que l'on puisse décrire le domaine Ω de la façon suivante

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \Phi_1(x, y) \leq z \leq \Phi_2(x, y)\Big\}$$

Alors Ω est quarrable et si f est intégrable sur Ω alors :

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_1(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dy\right) dx$$

Théorème 16. Formule de Fubini partielle

On suppose qu'il existe une fonction qui à tout $z \in [a, b]$ associe Ω_z, un domaine quarrable de $\mathbb{R}^2$. De plus on suppose cubable, le domaine Ω défini de la façon suivante

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq z \leq b,\ (x, y) \in \Omega_z\Big\}$$

Si f est intégrable sur Ω alors

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)dxdy\right) dz$$

Théorème 17. Formule de changement de variable

Soit Ω un ensemble fermé, borné, cubable. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe $\mathcal{C}_1$. On suppose que pour tout $(x,y,z) \in \Omega$, $J_F(x,y,z) \neq 0$. On vérifie alors :

$$\iiint_{\Omega} f(F(x,y,z))\,|J_F(x,y,z)|\,dxdydz = \iiint_{\Omega_1} f(u,v,w)dudvdw$$

Théorème 18. Coordonnées sphériques

Le changement de variable en sphérique est donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ y & = & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ z & = & \rho\sin\varphi \end{array}\right. \qquad \text{avec } \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi] \text{ et } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Le jacobien de ce changement de variable vaut $J = \rho^2\cos\varphi$.

Théorème 19. Coordonnées cylindriques

Le changement de variable en cylindrique est donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & z \end{array}\right. \qquad \text{avec } r \geq 0 \text{ et } \theta \in [0,2\pi]$$

Le jacobien de ce changement de variable vaut $J = r$.

IV Intégrales curvilignes

Théorème 20. Formule de Green-Riemann

Soient Ω un ouvert borné régulier et Γ son bord que l'on suppose sans point double. On note Γ^+, ce bord parcouru dans le sens positif. Alors si $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω alors

$$\int_{\Gamma^+} \omega = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

Théorème 21. Paramétrage d'une ellipse.

Les courbes d'équations

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

sont les ellipses de centre (α,β) d'axes (Ox) et (Oy). On chosit souvent comme paramétrage

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \alpha + a\cos(t) \\ y(t) & = & \beta + b\sin(t) \end{array}\right. \qquad \text{avec } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Le cercle est une ellipse pour $a = b$.

Théorème 22. Paramétrage d'une parabole.

Les courbes d'équations

$$k(x-a)^2+b=y$$

sont les paraboles de sommet (a,b) et dont l'axe de symétrie est parallèle à (Oy). On chosit souvent comme paramétrage

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= k(t-a)^2+b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) &= t+a \\ y(t) &= kt^2+b \end{cases}$$

Les courbes d'équations

$$k(y-a)^2+b=x$$

sont les paraboles de sommet (b,a) et dont l'axe de symétrie est parallèle à (Ox). On chosit souvent comme paramétrage

$$\begin{cases} x(t) &= k(t-a)^2+b \\ y(t) &= t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) &= kt^2+b \\ y(t) &= t+a \end{cases}$$

Théorème 23. Paramétrage d'une hyperbole.

Les courbes d'équations

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

sont les hyperboles de centre (α,β) d'axes (Ox) et (Oy) et d'asymptotes les droites d'équations

$$\frac{x-\alpha}{a}-\frac{y-\beta}{b}=0 \quad \text{et} \quad \frac{x-\alpha}{a}-\frac{y-\beta}{b}=0$$

On chosit souvent comme paramétrage

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{a}{\cos(t)}+\alpha \\ y(t) &= b\tan(t)+\beta \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) &= t+a \\ y(t) &= kt^2+b \end{cases}$$

Théorème 24. Une forme différentielle est exacte

Si ω est de classe $\mathcal{C}^1$ et définie sur un ouvert étoilé $\mathbb{U}$, alors ω est exacte, si et seulement si,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

sur $\mathbb{U}$.

Théorème 25. Calcul de la longueur d'un arc ...

Soit Γ un arc

— Mohammed EL BACHIR —

Table des matières