

# Un exercice type

**Exercice 1.** Soient  $I$  la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que  $A^2 - A - 2I_3 = 0$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

(b) Soit  $n > 3$ . Par la division euclidienne sur les polynômes,

il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  et un polynôme  $P_n$  tel que  $X^n = P_n(X)(X^2 - X - 2) + a_nX + b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Trouver  $a_n$  et  $b_n$ . En déduire  $A^n$ .

**Corrigé 1.** (a) Calculons  $A^2$  :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par suite,  $A^2 - A - 2I = 0$ . On réécrit cette équation :

$$A^2 - A - 2I = 0 \iff A^2 - A = 2I \iff A \left( \frac{1}{2}(A - I) \right) = I \iff A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) L'équation  $x^2 - x - 2 = 0$  a deux racines distinctes : 2 et  $-1$ . On a alors

$$\begin{cases} (-1)^n &= -a_n + b_n \\ 2^n &= 2a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} (-1)^n &= -a_n + b_n \\ 2^n &= 2a_n + b_n \end{cases} \iff a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

Maintenant, on peut donner l'expression de  $A^n$ , en effet,

$$A^n = (A^2 - A - 2I) P_n(A) + a_n A + b_n I = \begin{pmatrix} b_n & a_n & a_n \\ a_n & b_n & a_n \\ a_n & a_n & b_n \end{pmatrix}$$