Polynôme interpolateur

I Définition

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_j, un polynôme p à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall j \in \left\{0, 1, .., n-1\right\}$, $p(x_j) = f(x_j)$.

II Comment trouver ces polynômes ?

Il suffit de calculer tous les points $p(x_j) = \alpha_j$,en effet, ici, on a des points : (x_j, α_j). Puis, il faut chercher un polynôme qui vérifie tous ces points. Noter que si on a 3 points alors le polynôme à chercher est de degré 2.

III Quelques exemples

Exercice 1. Voici, un petit exercice qui peut servir de méthode :

1. Déterminer un polybôme interpolateur de la fonction $x \mapsto \exp(x)$ dans le cas où $n = 1$ aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
2. Déterminer un polynôme interpolatteur de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ dans le cas où $n = 2$ aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

Corrigé 1. Il suffit de former les polynômes qui vérifient les coordonnées précisées par l'énoncé :

1. Soit $f : x \mapsto \exp(x)$ la fonction exponentielle, on a alors
$$f(x_0 = 0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x_1 = 1) = e$$
Maintenant, il suffit de trouver un polynôme vérifiant les points : $(0, 1)$ et $(1, e)$. Il est donné par l'expression suivante :
$$p(x) = 1 + (e-1)x$$
2. En appliquant la même méthode, on trouve que $p(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1$.
Notez qu'il y a un système, très simple, à résoudre.

— Mohammed EL BACHIR —