Algèbre du Semestre 4

I Eléments d'algèbre

Théorème 1. Soit $(\mathbb{E},+,\times)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Alors $\mathbb{F}\subset\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, si et seulement si, $\forall x,y\in\mathbb{F},\forall\lambda\in\mathbb{R}$ on a $x+\lambda y\in\mathbb{F}$.

Théorème 2. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2\subset\mathbb{E}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On dit que la somme $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ de $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ par

$$\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2=\Big\{x+y \text{ tel que } x\in\mathbb{F}_1, y\in\mathbb{F}_2\Big\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. On dit que la **somme** $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est **directe**, et on écrit $\mathbb{F}_1\oplus\mathbb{F}_2$, si les vecteurs de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ s'écrivent de façon unique comme somme d'un vecteur de $\mathbb{F}_1$ et d'un vecteur de $\mathbb{F}_2$, à savoir

$$\forall z\in\ \mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2, \exists! x\in\mathbb{F}_1, \exists! y\in\mathbb{F}_2 \text{ tel que } z=x+y$$

Théorème 3. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2\subset\mathbb{E}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. La **somme** $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2$ est **directe**, si et seulement si, $\mathbb{F}_1\cap\mathbb{F}_2=\{0\}$.

Théorème 4. La somme de $\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2+...+\mathbb{F}_k$ est directe $\Longleftrightarrow \forall i=\Big\{1,...,k\Big\}$ on a $\mathbb{F}_i\cap\left(\sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{F}_j\right)=\{0\}$.

Théorème 5. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $A\subset\mathbb{E}$ un ensemble de $\mathbb{E}$ alors $\mathrm{Vect}\Big(A\Big)$ est précisément l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire finie de vecteurs de A. En d'autres termes :

$$\mathrm{Vect}\Big(A\Big)=\Big\{\lambda_1e_1+...+\lambda_ke_k \text{ avec } k\in\mathbb{N},\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{R} \text{ et } e_1,...,e_k\in A\Big\}$$

Propriété 1. Quelques propriétés de $\mathrm{Vect}\Big(A\Big)$:
- Si $\mathbb{F}\subset\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ alors $\mathrm{Vect}\Big(\mathbb{F}\Big)=\mathbb{F}$.
- Si $A,B\in\mathbb{E}$ alors $\mathrm{Vect}\Big(A\cup B\Big)=\mathrm{Vect}\Big(A\Big)+\mathrm{Vect}\Big(B\Big)$.

Définition 1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{R}-$espace vectoriels munis de lois internes et externes notées comme de cotume $+$ et $\times$. Soit $\varphi:E\longrightarrow\mathbb{F}$ une application. Alors φ est dite **linéaire** si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x,y\in\mathbb{E}$ on a $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$
2. $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{E}$ on a $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$

On note $\mathcal{L}\Big(\mathbb{E},\mathbb{F}\Big)$ l'**ensemble des applications linéaires** de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Noter que $\forall\varphi\in\mathcal{L}\Big(\mathbb{E},\mathbb{F}\Big)$ on a $\varphi(0)=0$.

Théorème 6. Si $\varphi\in\mathcal{L}(E,\mathbb{F})$ on a alors que $\varphi\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_jx_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\varphi(x_j)$.

Définition 2. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{F}\Big)$ une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. On définit le noyau $\ker\Big(\varphi\Big) \subset \mathbb{E}$ de φ et l'image $\mathrm{Im}\Big(\varphi\Big) \in \mathbb{F}$ de φ par

$$\ker\Big(\varphi\Big) = \Big\{x \in \mathbb{E} \text{ tel que } \varphi(x) = 0\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\Big(\varphi\Big) = \Big\{\varphi(x), x \in \mathbb{E}\Big\}$$

Définition 3. φ est un **isomorphisme** de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, si et seulement si, $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{R}\Big)$ et bijective.

Théorème 7. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux sous-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{F}\Big)$ une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Alors

(1) φ est **injective** $\Longleftrightarrow \ker\Big(\varphi\Big) = \{0\}$.

(2) φ est **surjective** $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}\Big(\varphi\Big) = \mathbb{F}$.

φ est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$, si et seulement si, (1) et (2) sont vérifiées. Dans ce cas l'application réciproque φ^{-1} est aussi linéaire $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{F}, \mathbb{E}\Big)$.

Théorème 8. Une famille $\Big(e_1, ..., e_n\Big)$ est une base, si et seulement si, elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème 9. Théorème fondamental de la théorie de la dimension.

Si un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{E}$ possède une famille génératrice à k éléments et si une famille libre de $\mathbb{E}$ possède p éléments, alors $p \leq k$. En d'autres termes, une famille libre de $\mathbb{E}$ a moins (ou autant) d'éléments qu'une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

Les familles libres ont moins d'éléments que les familles génératrices.

Théorème 10. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Si $\mathcal{B} = \Big(e_1, ..., e_p\Big)$ et $\mathcal{B}' = \Big(e_1', ..., e_q'\Big)$ sont deux bases de $\mathbb{E}$ alors nécessairement $p = q$.

Deux bases d'un même espace vectoriel ont forcément le même nombre d'éléments.

Théorème 11. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. si $\mathbb{E}$ possède une base $\mathcal{B} = \Big(e_1, ..., e_n\Big)$ de n vecteurs. On dit que n est la dimension de $\mathbb{E}$ et on écrit $\dim\Big(\mathbb{E}\Big) = n$.

$\forall x \in \mathbb{E}, \exists! x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. On dit que les x_i sont **les coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$.

Théorème 12. Soit $\mathbb{E}$ un espace-vectoriel de dimension n. Alors toute famille libre de $\mathbb{E}$ constituée de n vecteurs est une base de $\mathbb{E}$, et toute famille génératrice de $\mathbb{E}$ constituée de n vecteurs est une base de $\mathbb{E}$.

Donc, en dimension n, si $\mathcal{F}$ a n éléments alors

$$\mathcal{F} \text{ libre } \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ génératrice } \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ base de } \mathbb{E}$$

Théorème 13. Théorème de la base incomplète.

Soit $\mathbb{E}$ un espace-vectoriel de dimension n, et soit $\Big(e_1, ..., e_p\Big)$ une famille libre de $\mathbb{E}$ avec $p \leq n$ alors il existe $e_{p+1}, ..., e_n \in \mathbb{E}$ tels que $\Big(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\Big)$ est une base de $\mathbb{E}$.

Une famille libre se complète en une base.

Théorème 14. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace-vectoriel et soient $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ de dimension finie. Alors

$$\dim\Big(\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2\Big) = \dim\Big(F_1\Big) + \dim\Big(\mathbb{F}_2\Big) - \dim\Big(F_1 \cap \mathbb{F}_2\Big)$$

En particuler la somme $\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2$ est directe, si et seulement si, $\dim\Big(\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2\Big) = \dim\Big(F_1\Big) + \dim\Big(\mathbb{F}_2\Big)$.

Théorème 15. Théorème du rang.
Soit $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux $\mathbb{R}-$ espaces vectoriels, $\mathbb{E}$ élément de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{F}\Big)$ une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Alors

$$\dim\Big(\ker(\varphi)\Big) + \dim\Big(\mathrm{Im}(\varphi)\Big) = \dim\Big(\mathbb{E}\Big)$$

Où $\mathrm{Rg}\Big(\varphi\Big) = \dim\Big(\mathrm{Im}(\varphi)\Big)$.

II Matrices et applications linéaires

Notation 1. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à p lignes et q colonnes.

Notation 2. On note $\mathbf{A} = \Big(a_{ij}\Big)_{ij}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ avec $0 \leq i \leq p$ et $0 \leq j \leq q$.

Définition 4. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{A} = \Big(a_{ij}\Big)_{ij}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. La transposée de $\mathbf{A}$ notée ${}^t\mathbf{A}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ donnée par ${}^t\mathbf{A} = \Big(a_{ji}\Big)_{ij}$.

Définition 5. Produit des matrices.
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{A} = \Big(a_{ij}\Big)_{ij}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B} = \Big(b_{ij}\Big)_{ij}$ une matrice de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. On définit alors $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ comme la matrice $\mathbf{C} = \Big(c_{ij}\Big)_{ij}$ de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

avec $\forall i = \Big\{1, ..., p\Big\}$ et $\forall j = \Big\{1, ..., r\Big\}$.

Propriété 2. Voici quelques propriétés de la transposition :
- $\forall \mathbf{I}_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a ${}^t\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n$.
- $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a ${}^t\Big({}^t\mathbf{A}\Big) = \mathbf{A}$.
- $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\forall \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ on a ${}^t\Big(\mathbf{A} \times \mathbf{B}\Big) =^t \mathbf{B} \times^t \mathbf{A}$.
- $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $\forall \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ on a ${}^t\Big(\mathbf{A} + \mathbf{B}\Big) =^t \mathbf{A} +^t \mathbf{B}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a ${}^t\Big(\lambda \times \mathbf{A}\Big) = \lambda \times^t \mathbf{A}$.

Définition 6. Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux espaces vectoriels de dimension finies et $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{F}\Big)$ une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Soient $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{B}'$ une base de $\mathbb{F}$. La matrice de représentation de φ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Théorème 16. Théorème de composition.

Soient $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$ trois espaces vectoriels de dimension finie. $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathbb{E}_1$, $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathbb{E}_2$ et $\mathcal{B}_3$ une base de $\mathbb{E}_3$. $f \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2\Big)$ et $g \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3\Big)$ alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$$

Définition 7. Soit $\mathbf{A}$ une matrice réelle carrée d'ordre n. On dit que $\mathbf{A}$ est inversible s'il existe $\mathbf{B}$ une matrice réelle carrée d'ordre n telle que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. On dit que $\mathbf{B}$ est l'inverse $\mathbf{A}$ et on note $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Notation 3. On note la matrice identité d'ordre n par $\mathbf{I}_n = \Big(\delta_{ij}\Big)_{ij}$.

Théorème 17. Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux espaces vectoriels de même dimension finie. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}^{'}$ deux bases respectivement de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{F}\Big)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible, si et seulement si, φ est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$.

Théorème 18. Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{E}, \mathbb{F}\Big)$ et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^{'}$ deux bases de E et $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^{'}$ deux bases de $\mathbb{F}$; Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1^{'},\mathcal{B}_2^{'}}(\varphi) = \mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2^{'}}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1^{'}}(\varphi)$$

Où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1^{'}}(\varphi)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2^{'}}(\varphi)$ sont les matrices de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_1^{'}$ et de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_2^{'}$.

Théorème 19. Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}^{'}$ deux bases de $\mathbb{E}$ et soit $\varphi \in \mathrm{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$ alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi) = \mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$$

Propriété 3. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}^{'}$ deux bases de $\mathbb{E}$ alors $\mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

III Diagonalisation des endomorphismes et des matrices

Définition 8. La trace d'une matrice carrée $\mathbf{A} = \Big(a_{ij}\Big)_{ij} \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ est définie par $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Propriété 4. Le determinant et la trace d'une matrice carrée ne dépendent pas de la base.

Propriété 5. Voici quelques propriétés de la trace.

1. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{tr}(\mathbf{A}) + \mathbf{tr}(\mathbf{B})$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{tr}(\lambda \times \mathbf{A}) = \lambda \times \mathbf{tr}(\mathbf{A})$
3. $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{tr}({}^t\mathbf{A}) = \mathbf{tr}(\mathbf{A})$
4. $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \forall \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$, $\mathbf{tr}(\mathbf{AB}) = \mathbf{tr}(\mathbf{BA})$
5. $\forall \mathbf{P} \in \mathbf{GL}_n, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}) = \mathbf{tr}(\mathbf{A})$

Propriété 6. Voici quelques propriétés de déterminant

1. $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \times \det(\mathbf{B})$
2. $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \Big(\det(\mathbf{A})\Big)^{-1}$

Définition 9. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, et $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{E})$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit qu'un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de φ s'il existe $x \in \mathbb{E}, \neq 0$ tel que $\varphi(x) = \lambda x$. Si λ est une valeur propre de φ, les $x \in \mathbb{E}$ qui vérifient $\varphi(x) =$ sont appelés vecteurs propres de φ associés à la valeur propre λ. L'espace propre E_λ associé à la valeur propre λ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ constitué des vecteurs propres de φ associés à λ donc

$$E_\lambda = \Big\{x \in \mathbb{E} \text{ tel que } \varphi(x) = \lambda x\Big\}$$

Notation 4. On note $\mathbf{Sp}(\varphi)$ le spectre de φ contitué, par définition, des valeurs propres de φ.

Propriété 7. Dire que λ est une valeur propre de φ équivant à dire $\Big(\varphi - \lambda \cdot \mathbf{Id}_E\Big)$ n'est pas inversible alors

$$E_\lambda = \ker\Big(\varphi - \lambda \mathbf{Id}_E\Big)$$

Définition 10. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et soit $\varphi \in \mathrm{End}\Big(E\Big)$. On appelle polynôme caractéristique de φ, le polynôme réel χ_φ définit par

$$\chi_\varphi(X) = \det\Big(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) - X \cdot \mathbf{Id}_n\Big)$$

où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ de dimension n et $\mathbf{Id}_n$ la matrice identité d'ordre n. La définition ne dépend pas de la base.

Théorème 20. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \mathrm{End}\Big(E\Big)$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$, et χ_φ le polynôme caractéristique de φ. Alors λ est valeur propre de φ, si et seulement si, $\chi_\varphi(\lambda) = 0$.

Définition 11. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \mathrm{End}\Big(E\Big)$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit que φ est diagonalisable, s'il existe $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

Information 1. Puisqu'un polynôme a toutes ses racines dans $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est algèbriquement clos.

Théorème 21. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathrm{End}\Big(\varphi\Big)$ un endomorphisme de φ. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ les valeurs propres distinctes de φ, et soient $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, ..., E_{\lambda_k}$ les sous espaces propres correspondant. La somme

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_k} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_k}$$

est toujours directe et φ est diagonalisable, si et seulement si, $\mathbb{E} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_k} \oplus ... \oplus E_{\lambda_k}$.

Théorème 22. Si φ est diagonalisable alors $\mathbb{E}$ a une base de vecteurs propres.

Théorème 23. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n. $\varphi \in \text{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$, et $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_k}$ les espaces propres correspondant. Alors φ est diagonalisable, si et seulement si, $n = \sum_{j=1}^{k} \text{dim} E_{\lambda_k}$. En particulier, φ est automatiquement diagonalisable si $k = n$, à savoir, si φ a n valeurs propres distinctes.

Théorème 24. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \text{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ et χ_φ le polynôme caractéristique de φ. Soit λ une racine de χ_φ de multiplicité k à savoir $\chi_\varphi(X) = \Big(X - \lambda\Big)^k Q(X)$ où Q est le polynôme réel de degré $n - k$ tel que $Q(\lambda) \neq 0$. Si E_λ est l'espace propre associé à λ alors $\text{dim} E_\lambda \leq k$. En particulier, si $k = 1$, alors $\text{dim} E_\lambda = 1$.

Théorème 25. Cayly-Hamilton
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, $\varphi \in \text{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ et χ_φ le polynôme caractéristique de φ alors $\chi_\varphi\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)\right) = 0$ pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$, où $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ est la matrice de représentation de φ dans $\mathcal{B}$ et 0 est la matrice carrée nulle d'ordre $\dim(\mathbb{E})$.

Théorème 26. Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle carrée. On dit que $\mathbf{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ est une matrice diagonale.

IV Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire

Définition 12. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On appelle **norme** sur $\mathbb{E}$ toute application $\|\bullet\| : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois propriétés :

(a) $\forall x \in \mathbb{E}$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
(b) $\forall x \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$,
(c) $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Définition 13. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur $\mathbb{E}$ toute forme bilinéaire symétrique B sur $\mathbb{E}$ qui est définie positive, à savoir, qui est telle que

(a) (positive) $\forall x \in \mathbb{E}, \mathrm{B}(x, x) \geq 0$,
(b) (définie) $\forall x \in \mathbb{E}, \mathrm{B}(x, x) = 0 \iff x = 0$
(c) (symétrie) $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$.

Théorème 27. Inégalité de Schwarz.
Soit $\langle \bullet, \bullet \rangle$ un produit scalaire associé définie à la norme définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in \mathbb{E}$, on a alors

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{E}$

Théorème 28. A tout produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est associé une norme $\|\bullet\|$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle \bullet, \bullet \rangle}$ pour tout x de $\mathbb{E}$.

Théorème 29. Identités remarquables

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\langle \bullet, \bullet \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$. Alors

(a) $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$,

(b) $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big)$,

(c) $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$.

Théorème 30. Théorème de Pythagore

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\langle \bullet, \bullet \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$. Soit $\|\bullet\|$ la norme associée à $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Deux vecteurs x et y de $\mathbb{E}$ sont orthogonaux, si et seulement si,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 31. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\langle \bullet, \bullet \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$. Soit $\|\bullet\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Soit $\Big(e_1, e_2, ..., e_n\Big)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$. On dit que la famille de est orthogonale si les e_i sont orthogonaux deux à deux et donc si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$. La famille est dite orthonormale si, en plus, $\|e_i\| = 1$ pour tout i.

Théorème 32. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ et $\Big(e_1, ..., e_n\Big)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Alors $\Big(e_1, ..., e_n\Big)$ est une famille libre.

Théorème 33. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Alors toute famille orthogonale de vecteurs non nuls composée de précisement n vecteurs est une base de $\mathbb{E}$.
En particulier, une famille orthonormale composée de n vecteurs est une base de $\mathbb{E}$.

Théorème 34. Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire possède une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Théorème 35. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Toute famille orthonormale $\Big(e_1, ..., e_k\Big)$ de $\mathbb{E}$ se complète en une base $\Big(e_1, ...e_n\Big)$ de $\mathbb{E}$. A savoir, il existe $e_{k+1}, ..., e_n \in \mathbb{E}$ tel que $\Big(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\Big)$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$.

Définition 14. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Soit $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$. L'orthogonal de $\mathbb{F}^\perp$ de $\mathbb{F}$ pour $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est défini par

$$\mathbb{F}^\perp = \Big\{x \in \mathbb{E} \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{F}, \langle x, y\rangle = 0\Big\}$$

Définition 15. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Pour tout sous espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ on a que $\mathbb{E} = F \oplus \mathbb{F}^\perp$.

V Endomorphisme et matrices symétriques

Théorème 36. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Pour tout endomorphisme $\varphi \in \mathrm{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ de $\mathbb{E}$, il existe un unique endomorphisme $\varphi^* \in \mathrm{End}(\mathbb{E})$ de $\mathbb{E}$, appelé adjoint de $\mathbb{E}$ qui vérifie que pour tout $x, y \in \mathbb{E}$

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^*(y) \rangle$$

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$, alors φ^* est caractérisé par le fait que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^*) =^t \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$, où $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ est la matrice de représentation de φ dans $\mathcal{B}$, ${}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi)$ est la transposée de cette matrice et $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^*)$ est la matrice de représentation de φ^* dans $\mathcal{B}$.

Définition 16. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$. soit $\varphi \in \operatorname{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit alors que φ est diagonalisable si $\varphi = \varphi^*$ où φ^* est l'adjoint de φ pour $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Donc φ est dit symétrique (sous-entendu pour $\langle \bullet, \bullet \rangle$) si $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$ pour tout x et y de $\mathbb{E}$.

Théorème 37. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ et $\varphi \in \operatorname{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$ un endomorphisme de $\mathbb{E}$ dans une base orthonormale pour $\langle \bullet, \bullet \rangle$. En d'autres termes, tout endomorphisme symétrique est diagonalisable et la base qui diagonalise l'endomorphisme peut être choisie orthogonale.

Théorème 38. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ et soit $\varphi \in \operatorname{End}\Big(\mathbb{E}\Big)$. Si φ est symétrique alors φ est diagonalisable qui est, en plus, dans une base diagonale pour $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

Théorème 39. Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée symétrique d'ordre n. Il existe alors une matrice orthogonale $\mathbf{P}$ telle que ${}^t\mathbf{PAP}$ est diagonale. En particulier $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Définition 17. $\mathbf{A}$ est une matrice orthogonale si elle est telle que ${}^t\mathbf{AA} = \mathbf{I}_n$.

— Mohammed EL BACHIR —

Table des matières