Exercices intéressants

Exercice 1. Soient $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$ et $I(n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

1. Montrer que l'intégrale $I(n)$ est convergente. Que vaut $I(2p+1)$?

   Soit $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$
2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. On suppose $n = 2$. Ecrire la matrice assosié à φ dans la base $\left(1, X, X^2\right)$. Construire une base orthonormale de $\left(P_0, P_1, P_2\right)$ par le procédé d'orthogonlisation de Gram-Schmidt appliqué à $\left(1, X, X^2\right)$.

Exercice 2. On munit le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire définit par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (P,Q) &\longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ formé par des polynomes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x,y,z)$ et $u' = (x', y', z')$ alors

$$f(u,u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.
   (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.
   (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour f.

Exercice 4. Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $x_1 = (1,-2,2)$, $x_2 = (-1,0,-1)$, $x_3 = (5,-3,7)$.

Exercice 5. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A(m) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de $A(m)$ et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de $A(m)$. Déterminer lorsque cela est possible $A^{-1}(m)$.
3. Lorsque $A(m)$ n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de $A(m)$.

Exercice 6. Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tA$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Diagonaliser A.
3. Diagonaliser A dans une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 8. Soit $\left(\mathbb{E}, \cdot\right)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B} = \left(a, b, c\right)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{E}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Identifier φ lorsque sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soit $\left(\mathbb{E}, \cdot\right)$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B} = \left(a, b, c\right)$ une base orthonormée directe de $\mathbb{E}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$. Identifier φ lorsque sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé 1. 1. ${}^tA = A$ donc A est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. Par exemple : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et ${}^tQ = Q^{-1}$

Corrigé 2.

Corrigé 3.

Corrigé 4.

Corrigé 5.

Corrigé 6.

Corrigé 7.

Corrigé 8. – En vérifie facilement que ${}^tAA = I_3$. Donc A est orthogonale.

– De plus, le $\det(A) = 1$. Donc φ est une rotation vectorielle.

– Soit $\mathcal{D} = \Big\{x \in \mathbb{E} \text{ tel que } \varphi(x) = x\Big\}$, alors

$$AX = X \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & z & = & 3x \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 3y \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 3z \end{array}\right. \iff z - x = 0$$

Donc $\mathcal{D} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

– Déterminons l'angle $\theta\,[2\pi]$ de cette rotation. On a que

$$\text{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1 = \frac{5}{3} \iff \cos\theta = \frac{1}{3}$$

– Cherchons le signe de $\sin\theta$. Alors $\text{Sg}\Big(\sin\theta\Big) = \text{Sg}\Big[\det_{\mathcal{B}}\Big(\alpha, \varphi(\alpha), u\Big)\Big]$ où $\alpha \notin \mathcal{D}$.

On choisit $\alpha = a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} < 0 \Longrightarrow \text{Sg}\Big(\sin\theta\Big) = -1$$

On obtient alors $\sin\theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

- **Conclusion :** φ est une **rotation vectorielle** d'angle $\theta\,[2\pi]$, d'axe $\mathcal{D}$ dirigée par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ avec
$$\cos\theta = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Corrigé 9.

- En vérifie facilement que ${}^tAA = I_3$. Donc A est orthogonale.
- De plus, le $\det(A) = -1$.
- Cherchons $\mathcal{D} = \Big\{x \in \mathbb{E} \text{ tel que } \varphi(x) = x\Big\}$, alors
$$AX = X \iff \begin{cases} 7x - 2y - 4z = 9x \\ -4x + y - 8z = 9y \\ -4x - 8y - z = 9z \end{cases} \iff x + 2y + 2z = 0$$
- **Conclusion :** $\mathcal{D}$ est de dimension 2. Donc φ est une **symétrie orthogonale** par rapport au plan d'équation $\mathcal{D}$, dans la base $\mathcal{B}$.

— Mohammed EL BACHIR —