I Intégration sur intervalle quelconque

Exercice 1. On souhaite éudier la fonction suivante $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{1+t^2}$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Le théorème de dérivabilité peut-il s'appliquer ? (Justifier votre réponse).

Corrigé 1. Soit $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt^2)}{1+t^2}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \to f(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to f(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, il existe une fonction telle que

   $$\left|f(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \text{ converge}$$

   Donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déjà répondu.

3. – On a vu dans la question précédente que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – De plus, pour tout $x, t \in \mathbb{R}$,

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2}{1+t^2} \times \cos(xt^2)\right| \leq \frac{t^2}{1+t^2}$$

   Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} dt$ diverge. La condition de domination n'est pas satisfaite.
   Donc le théorème de dérivabilité ne s'applique pas.

— Mohammed EL BACHIR —

Table des matières