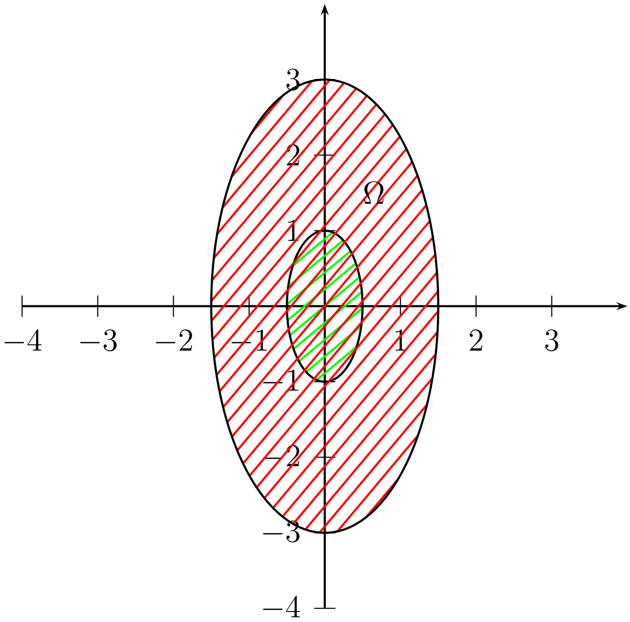
Le sujet est à voir ici http ://www.u-cergy.fr/rech/...

Corrigé 1. Etude de Ω.

1. (a) Pour $k > 0$, Γ_k sont des ellipses de centre $(0,0)$ et d'axes (Ox) et (Oy).

   (b) Le dessin de Γ_1, Γ_2 et Ω. Ω est la partie qui n'est pas hachurée en vert.



   (c) Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ on a :

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_3} f(x,y)dxdy - \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$$

2. Calcul de $J = \displaystyle\iint_{\Omega_1} \sqrt{4x^2+y^2}dxdy$.

   (a) C'est du cours. La formule : $\displaystyle\int_{\Gamma_k^+} \omega = \iint_{\Omega_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)dxdy$

   (b) Soit $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$. Où

$$P(x,y) = -\frac{1}{3}y\sqrt{4x^2+y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{1}{3}x\sqrt{4x^2+y^2}$$

   En calculant $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{4x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{4y^2+x^2}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{4x^2+y^2} + \frac{4x^2}{\sqrt{4y^2+x^2}}\right)$$

   Et donc

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2}$$

   Donc on a bien $J = \displaystyle\int_{\Gamma_1^+} \omega$.

   (c) On peut choisir comme paramétrage

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1}{2}\cos t \\ y(t) &= \sin t \end{cases} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(d) Calculons J.

$$J=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)+\frac{1}{2}\cos t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,(\cos t)\right)dt=\frac{\pi}{3}$$

3. Calcul de $K=\displaystyle\iint_{\Omega_3}\sqrt{4x^2+y^2}dxdy$.

4. (a) C'est du cours.

   (b) Je ne sais pas encore faire. Cependant je peux calculer le déterminant. On pose $u=2x$ et $v=y$ alors

$$\frac{1}{J_F(x,y)}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & x\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

   (c) En appliquant le théorème de changement de variable en dimension 2. On obtient :

$$K=\iint_{\Omega_3}\sqrt{4x^2+y^2}dxdy=\iint_{B(0,3)}\sqrt{u^2+v^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{2}\iint_{B(0,3)}\sqrt{u^2+v^2}dudv$$

   (d) La formule de changement de variable en polaire s'écrit

$$\begin{cases} x(\rho,\theta) &= \rho\cos\theta\\ y(\rho,\theta) &= \rho\sin\theta\end{cases}\qquad \text{avec } 0\le\rho\le 3 \text{ et } 0\le\theta\le 2\pi$$

   Rappelons que le jacobien est ρ.

   (e) Calculons K en utilisant le changement de variable précédent :

$$K=\frac{1}{2}\iint_{[0,3]\times[0,2\pi]}\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}\rho d\rho d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^3\rho^2 d\rho\right)d\theta=9\pi$$

5. D'après 1.(c), on a $I=9\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{26}{3}\pi$.

Corrigé 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit les intégrales suivantes

$$I_n=\iiint_{\Omega_n}\left(\cos(z)-\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)dxdydz$$

avec $\Omega_n=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 0<x<1,\ \dfrac{1}{n}<y<n,\ 0<yz<x^2\right\}$.

1. C'est du cours.

2. En applicant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \iiint_{[0,1]\times\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{x^2}{y}\right]}\left(\cos(z)-\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)dxdydz\\
&= \int_0^1\left[\int_{\frac{1}{n}}^n\left(\int_0^{\frac{x^2}{y}}\cos(z)-\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)dz\right)dy\right]dx\\
&= \int_0^1\left[\int_{\frac{1}{n}}^n\left(\left[\sin(z)-z\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right]_0^{\frac{x^2}{y}}\right)dy\right]dx\\
&= \int_0^1\left[\int_{\frac{1}{n}}^n\left(\sin\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{x^2}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)dy\right]dx
\end{aligned}$$

3. Soit $h : y \to y \sin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$. En calculant $h^{'}(y)$ on obtient

$$h'(y) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right) + y\left(-\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = \sin\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^2}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

Ainsi $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\sin\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^2}{y}\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)dy = [h(y)]_{\frac{1}{n}}^{n} = n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(nx^2\right)$, donc

$$I_n = \int_0^1 \left(n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(nx^2\right)\right)dx$$

4. On pose $f_n(x) = n\sin\left(\dfrac{x^2}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\sin\left(nx^2\right)$.

   (a) On pose $X = \dfrac{x^2}{n}$ et notons que $X \to 0$ quand $n \to +\infty$.
   Alors $f_n(x) = x^2\left(\dfrac{\sin X}{X}\right) - X\left[\dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{x^2}{X}\right)\right]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{X\to 0}\left(x^2\left(\frac{\sin X}{X}\right) - X\left[\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{x^2}{X}\right)\right]\right) = x^2$$

   Donc (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \to x^2$.

   (b) On a :
   - Les (f_n) sont continue sur continue sur $\mathbb{R}$,
   - (f_n) converge simplement vers la fonction f qui est continue sur $\mathbb{R}$,
   - De plus pour tout $x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_n(x)| = \left|n\sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(nx^2\right)\right| \leq 2x^2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \int_0^1 2x^2 dx \quad \text{converge}$$

   D'après le théorème de la convergence dominé, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n$ est absolument convergente, donc convergente, ainsi que $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)dx = \int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

Corrigé 3. Soit $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt^2)}{1+t^2}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. – Pour tout $t \in \mathbb{R},\ x \to f(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – Pour tout $x \in \mathbb{R},\ t \to f(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, il existe une fonction telle que

$$\left|f(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} \text{ converge}$$

   Donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déjà répondu.

3. – On a vu dans la question précédente que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   – Pour tout $x \in \mathbb{R},\ t \to \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.
   – Pour tout $t \in \mathbb{R},\ x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur le $\mathbb{R}$ car $t^2+1>0$.

– De plus, pour tout $x, t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2}{1+t^2} \times \cos(xt^2)\right| \leq \frac{t^2}{1+t^2}$$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}dt$ diverge. La condition de domination n'est pas satisfaite.
Donc le théorème de dérivabilité ne s'applique pas.

— Mohammed EL BACHIR —