Université de Cergy-Pontoise **2006-2007**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Contrôle continu d'Intégrations

Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans l'exercice, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (4pts)

Enoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice 1 (3pts)

Préciser pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est convergente

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice 2

On définit la fonction F en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{(s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx}{\left((s-1)\sqrt{x^2+1}+2sx\right)^2+1}(2x+\sqrt{x^2+1})ds.$$

1)(3pts) Expliquer en utilisant une propriété de cours, mais sans faire de calculs, pourquoi F est de classe C^1.
2)(3pts) En effectuant un changement de variables, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\sqrt{x^2+1}}^{2x} \frac{t}{t^2+1} dt.$$

(Vous justifierez bien la formule obtenue).
3)(2pts) Donner alors une formule explicite de $F(x)$.
4)(2pts) En déduire que F admet une limite l que l'on précisera quand x tend vers $+\infty$.
5)(3pts) Peut-on en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt = l$? Vous justifierez votre réponse.