Université de Cergy-Pontoise **2007-2008**
S4 MI/M/MP/MP-ENSI/PC-ENSI

Contrôle continu d'Intégrations

Sujet 1

Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans l'exercice, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Question de cours (3pts)

Donner en fonction des valeurs de α et β la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta \ln^\alpha(t)} dt.$$

Exercice

On souhaite étudier la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t - E(t)}{x + t^2} dt,$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est l'unique entier tel que $E(t) \leq t < E(t) + 1$ (c'est la partie entière).

Partie I : Un résultat de régularité (9pts)
1)(2pts) Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ est bien convergente.
2)(4pts) Enoncer le résultat de régularité de classe C^1 pour les intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.
3)(3pts) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, F est de classe C^1 sur $]\varepsilon, +\infty[$. Conclure.

Partie II : Un calcul explicite de F (8pts)
1)(2pts) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \lim_{N \to +\infty} \int_{-(N+1)}^{(N+1)} \frac{-E(t)}{x + t^2} dt.$$

2)(1pt) Peut-on en déduire que $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-E(t)}{x + t^2} dt$?
3)(2pts) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-(n+1)}^{-n} \frac{-E(t)}{x + t^2} dt + \int_n^{(n+1)} \frac{-E(t)}{x + t^2} dt = \int_n^{(n+1)} \frac{1}{x + t^2} dt.$$

4)(3pts) En déduire que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x + t^2} dt$ et calculer explicitement F.