

Corrigé et barème

Durée 1h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Question de cours(4pts)

Le théorème de convergence dominée.

- On se donne une suite de fonctions f_n continues par morceaux sur tout segment de I .
- On suppose que f_n converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment de I .
- Il existe une fonction g telle que

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N} |f_n(t)| \leq g(t) \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ est convergente ,}$$

- alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_a^b f_n(t)dt$ est une intégrale convergente ainsi que $\mathcal{I} = \int_a^b f(t)dt$ et la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}$.

Exercice 1(3pts)

Préciser pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est convergente

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$ et l'intégrale est généralisée au voisinage de 0.

On a l'équivalent suivant, $\frac{1 - \cos(t)}{t^\alpha} \sim \frac{1}{2(t^{\alpha-2})}$ au voisinage de 0.

On sait que $\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-2}} dt$ est convergente si et seulement si $\alpha - 2 < 1$.

Donc I_α est convergente si et seulement si $\alpha < 3$.

Exercice 2 (13pts)

On définit la fonction F en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{(s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx}{((s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx)^2 + 1} (2x + \sqrt{x^2+1}) ds.$$

1)(3pts) Il s'agit d'une intégrale classique dépendant d'un paramètre.

La fonction $f : (x, s) \mapsto \frac{(s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx}{((s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx)^2 + 1} (2x + \sqrt{x^2+1})$ est C^1 sur

$\mathbb{R} \times [0, 1]$ (ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ et $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$).

Donc F est C^1 sur $[0, 1]$.

2)(3pts) On effectue le changement de variables pour x fixé $t = (s-1)\sqrt{x^2+1} + 2sx$.

On a alors $dt = (2x + \sqrt{x^2+1})ds$.

Pour $s = 0$ on a $t = -\sqrt{x^2+1}$ et pour $s = 1$ on a $t = 2x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\sqrt{x^2+1}}^{2x} \frac{t}{t^2+1} dt.$$

3)(2pts) En intégrant on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_{-\sqrt{x^2+1}}^{2x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+4x^2}{2+x^2} \right) \end{aligned}$$

.

4)(2pts) Quand x tend vers $+\infty$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+4x^2}{2+x^2} = 4$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln(2)$.

5)(3pts) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt$ est une intégrale généralisée en $\pm\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) $\frac{t}{t^2+1} \sim \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est divergente.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt$ est une intégrale divergente, il ne peut y avoir égalité.

Autre réponse possible :

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt$ était une intégrale convergente, comme $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ est une

fonction impaire on devrait avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt = 0$.

On devrait aussi vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt = \ln(2)$ d'après la question précédente.

Ce qui est absurde.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt$ est une intégrale divergente et il ne peut y avoir égalité.