

Contrôle continu d'Intégrations

Corrigé

Exercice 1(7pts)

On veut calculer l'intégrale triple suivante

$$I = \iiint_{\Omega} x \, dx dy dz,$$

où Ω est la demi-sphère suivante $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

1) Un changement de variable classique est le suivant dans Ω :

$$x = r \cos(\theta) \cos(\varphi), y = r \sin(\theta) \cos(\varphi), z = r \sin(\varphi),$$

$(r, \theta, \varphi) \in [0, 1] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a alors le jacobien $J = r^2 \cos(\varphi)$.

2) En appliquant le changement de variable et Fubini, on obtient

$$I = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi) d\varphi.$$

En notant que $\cos^2(\varphi) = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$, on obtient donc

$$I = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2(13pts)

On se propose de calculer l'intégrale suivante (énoncé corrigé)

$$I = \iint_{\Omega_1} v u^3 \cos(v^2) du dv, \text{ où } \Omega_1 = \left\{ (u, v) \in [0, +\infty[^2, \frac{1}{4} \leq u^4 + v^4 \leq 1 \right\}.$$

Pour cela on se propose de faire le changement de variable suivant $u = \sqrt{x} \sqrt{\cos(y)}$ et $v = \sqrt{x} \sqrt{\sin(y)}$. On définit donc la fonction suivante

$$\begin{aligned} F : \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times \left[0, \frac{\pi}{2} \right] &\longrightarrow \Omega_1 \\ (x, y) &\longmapsto (\sqrt{x} \sqrt{\cos(y)}, \sqrt{x} \sqrt{\sin(y)}). \end{aligned}$$

1) Dans le cours il a été donné le théorème suivant

Théorème 0.1 (Formule de changement de variables)

Soit Ω un ensemble fermé, borné, quarrable du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1 . On suppose que pour tout $(x, y) \in \Omega$ $J_F(x, y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_{\Omega} f(F(x, y)) |J_F(x, y)| dx dy = \iint_{\Omega_1} f(u, v) du dv.$$

2) En calculant on trouve,

$$(\sqrt{x}\sqrt{\cos(y)})^4 + (\sqrt{x}\sqrt{\sin(y)})^4 = x^2.$$

Donc si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, on a bien $F(x, y) \in \Omega_1$. Si $F(x, y) = F(x', y')$, il est facile de montrer que $(x, y) = (x', y')$ donc F est injective. Si on se donne $(u, v) \in \Omega_1$, alors en posant $a = u^2$ et $b = v^2$ on sait qu'il existe un unique couple $(x, y) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $(a, b) = (x \cos(y), x \sin(y))$ et on a bien $F(x, y) = (u, v)$ donc F est surjective.

3) Le calcul du jacobien donne

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{\cos(y)}}{2\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x} \sin(y)}{2\sqrt{\cos(y)}} \\ \frac{\sqrt{\sin(y)}}{2\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x} \cos(y)}{2\sqrt{\sin(y)}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{\cos(y)}\sqrt{\sin(y)}}$$

4) Il y avait une erreur d'énoncé, on trouvait

$$I = \frac{1}{4} \iint_{[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} x^2 \sin(y) \cos(x \sin(y)) dx dy.$$

au lieu de

$$I = \frac{1}{4} \iint_{[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} x^2 \cos(y) \cos(x \sin(y)) dx dy.$$

5) Dans le cours, Fubini a été énoncé de la manière suivante

Théorème 0.2 (Formule de Fubini)

On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est quarrable et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

6) En partant de la formule donnée dans l'énoncé, on a en appliquant Fubini

$$I = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(y) \cos(x \sin(y)) dy \right) dx,$$

On reconnaît une expression de la forme $u' \cos(u)$ et donc en intégrant on obtient

$$I = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sin(x) dx.$$

En faisant une intégration par partie on trouve

$$I = \frac{1}{4} \left[-x \cos(x) \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(x) dx.$$

Donc $I = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} \cos(\frac{1}{2}) - \cos(1) + \sin(1) - \sin(\frac{1}{2}))$.

7) (Question subsidiaire) La fonction F n'est pas C^1 sur le domaine fermé $\Omega = [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, mais uniquement sur le domaine $[\frac{1}{2}, 1] \times]0, \frac{\pi}{2}[$.