cours n° 2 : Intégrales multiples

Introduction :

Le problème est de se donner des outils pour calculer l'aire d'une surface, le volume d'un solide ou encore la masse d'une plaque ou d'un solide. En physique on peut aussi chercher la charge électrique d'une plaque connaissant la densité surfacique, en chimie on retrouve des problèmes de concentration.

1 Intégrales doubles

1.1 Parties quarrables du plan

Soit Ω un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire qu'il existe un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ tel que $\Omega \subset R$. Comme pour les intégrations dans $\mathbb{R}$, on se donne une subdivision de $[a, b]$, $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ (c'est à dire que $a = x_0 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_n = b$) et une subdivision de $[c, d]$, $(y_j)_{0 \leq j \leq m}$. On note $\sigma = ((x_i)_{0 \leq i \leq n}, (y_j)_{0 \leq j \leq m})$ et on dit que σ forme une partition de R en petits rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

On pose alors

$$s(\sigma) = \sum_{R_{ij} \subset \Omega} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

et

$$S(\sigma) = \sum_{R_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

On peut noter que $s(\sigma)$ représente l'aire de l'ensemble des rectangles qui sont inclus dans Ω alors que $S(\sigma)$ représente l'aire de l'ensemble des rectangles qui rencontrent Ω . On vérifie donc bien sûr que $s(\sigma) \leq S(\sigma)$.

On considère maintenant $\mathcal{P}(R)$ l'ensemble de toutes les partitions σ en petits rectangles de R , on dira que l'on peut calculer l'aire de Ω dans le cas suivant.

Définition 1.1 On dit que Ω est quarrable si et seulement si on vérifie

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{P}(R)} (s(\sigma)) = \inf_{\sigma \in \mathcal{P}(R)} (S(\sigma)) = \mathcal{A}(\Omega).$$

Si Ω est quarrable on appelle aire de Ω la valeur $\mathcal{A}(\Omega)$.

Proposition 1.1

- 1) L'intersection ou l'union de domaines quarrables est quarrable.
- 2) Les domaines dont "le bord" est régulier (c'est à dire dont le bord peut s'écrire comme un arc paramétré dont tous les points sont réguliers) est quarrable.

Conséquence : Les disques, rectangles, polygones sont des domaines quarrables.

Proposition 1.2 "le bord" d'une partie quarrable est quarrable et d'aire nulle. Par conséquent pour parler de l'aire d'un domaine quarrable on pourra prendre tout le bord, ne pas prendre le bord, ou ne prendre qu'une partie du bord sans en changer l'aire.

Dans ce cours on se limite à une notion de bord intuitive. On ne posera pas d'exercice sur le fait qu'un domaine soit quarrable ou pas. On pourra par contre donner un exemple de domaine ouvert non-quarrable dont l'aire intuitive est plus petite que ce pourrait-être l'aire du bord intuitif pour faire comprendre la complexité de la notion de bord.

1.2 Fonctions intégrables

Soit f une fonction bornée définie sur un domaine Ω (un ensemble borné) de $\mathbb{R}^2$. Il existe un rectangle R qui contient Ω . A toute partition $\sigma \in \mathcal{P}(R)$ on associe les sommes dites de Darboux suivantes :

$$s(f, \sigma) = \sum_{R_{ij} \subset \Omega} \left(\inf_{R_{ij}} f \right) (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$
$$\text{et } S(\sigma) = \sum_{R_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset} \left(\sup_{R_{ij}} f \right) (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Définition 1.2 On dit que f est intégrable si et seulement si

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{P}(R)} (s(f, \sigma)) = \inf_{\sigma \in \mathcal{P}(R)} (S(f, \sigma)) = \mathcal{I}(f, \Omega).$$

On appelle alors quand elle existe $\mathcal{I}(f, \Omega)$ l'intégrale de f sur Ω et on la note

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \mathcal{I}(f, \Omega).$$

On déduit directement de la définition le lien entre aire et intégrale double.

Proposition 1.3 Si Ω est un domaine quarrable alors

$$\mathcal{A}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 dx dy.$$

On signalera tout d'abord les propriétés algébriques.

Proposition 1.4 Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines quarrables d'intersection vide. Soient f et g deux fonctions intégrables sur Ω_1 et Ω_2 alors :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est intégrable et

$$\iint_{\Omega_1} (f(x, y) + \lambda g(x, y)) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \lambda \iint_{\Omega_1} g(x, y) dx dy.$$

- On vérifie une propriété équivalente à Chasles

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

- Si pour tout $x \in \Omega_1$, $f(x) \geq g(x)$

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy \geq \iint_{\Omega_1} g(x, y) dx dy.$$

Pour finir avec cette approche théorique, nous allons donner deux cas de fonctions intégrables.

Théorème 1.1 Soit f une fonction continue et bornée sur Ω , un domaine quarrable du plan, alors f est intégrable sur Ω .

On se limite à donner une idée de la preuve en expliquant que la continuité uniforme des fonctions continues sur des compacts nous donne que les fonctions continues sont limites uniformes de fonctions étagées.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.2 Soit f une fonction bornée sur Ω , un domaine quarrable du plan, continue sauf sur un ensemble de points D . Si D quarrable d'aire nulle alors f est intégrable sur Ω .

On expliquera que le résultat peut se montrer en signalant que f est continue sur $\Omega \setminus D$ et que toute fonction bornée est intégrable sur D (D étant quarrable d'aire nulle).

1.3 Intégrations successives

Théorème 1.3 (Formule de Fubini)

On considère deux fonctions φ_1 et φ_2 à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], \varphi_1(t) \leq \varphi_2(t).$$

On considère le domaine

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors le domaine Ω est quarrable et pour toute fonction f intégrable sur Ω on vérifie

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Si de plus, il existe deux fonction ψ_1 et ψ_2 continues sur un segment $[c, d]$ telles que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

alors

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemple :

Si on prend par exemple $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], x + y \leq 1\}$ alors on peut vérifier que Ω est bien de la forme souhaitée et en prenant $f(x, y) = \sin((1-y)^3)x$, on peut montrer que les calculs ne sont pas symétriques.

Idée de preuve :

On note tout d'abord que le fait que le domaine soit quarrable est un simple résultat d'existence des intégrales sur des segments, l'aire du domaine Ω étant en fait définie par $\int_a^b \varphi_2(t) - \varphi_1(t) dt$.

On se contente de montrer le résultat pour des fonctions continues (on ne peut pas vraiment faire autrement car je n'ai pas défini la notion d'intégrabilité sur $\mathbb{R}$). On montre le résultat en prenant une équisubdivision sur $[a, b]$ avec un paramètre 2^n et une équisubdivision sur $[c, d]$ avec un paramètre 2^m . Par continuité uniforme, on obtient la convergence uniforme par une suite de fonction étagée en (n, m) et on passe à la limite en utilisant les résultats d'intégrale dépendant d'un paramètre et des sommes de Riemann.

1.4 Changement de variables

On commencera par signaler que les changements de variables ne peuvent se faire comme sur $\mathbb{R}$ en étudiant le cas de $(u, v) = (-x, y)$ par exemple et en traitant l'exemple

$$I \iint_{B(0,1)} x^2 + y^2 dx dy.$$

On constate que si on fait un changement intuitif, avec $du = -dx$, on aurait $I = -I$ et donc $I = 0$ ce qui paraît peu vraisemblable la fonction étant positive.

Pour faire un changement de variable, on considère donc une fonction F définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

On suppose que F est C^1 et on rappelle que le jacobien de F est la fonction à valeurs réelles définies par

$$J_F(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Théorème 1.4 (Formule de changement de variables)

Soit Ω un ensemble fermé, borné, quarrable du plan. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1 . On suppose que pour tout $(x, y) \in \Omega$ $J_F(x, y) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iint_{\Omega} f(F(x, y)) |J_F(x, y)| dx dy = \iint_{\Omega_1} f(u, v) du dv.$$

On ne fera pas la preuve de ce théorème, par contre on expliquera que géométriquement $du dv$ représente l'aire élémentaire de référence et que quand on fait un changement de variable l'aire élémentaire devient égale à $|J_F(x, y)| dx dy$.

Enfin signalons le cas du changement de variable en polaire qui est applicable si f est une fonction continue alors que les hypothèses du théorème précédent ne sont pas toutes vérifiées :

$$\iint_{B(O, R)} f(x, y) dx dy = \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta.$$

exemples :

On pourra traiter par exemple $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur un carré et $g(x, y) = x + y$ sur le disque unité avec un changement de variable en polaire pour montrer que le domaine importe souvent plus que la fonction.

On traitera aussi $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sur un quart de disque pour trouver $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Pour $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y - x \leq 0\}$ et $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ on vérifiera que la changement de variable n'est pas conseillé alors que Fubini fonctionne parfaitement.

2 Intégrales triples

On peut généraliser la notion de domaine quarrable à la notion de domaine cubable. Un domaine Ω est alors inclus dans un cube K découpé en petits cubes K_{ijk} .

Pour une partition σ donnée, on associe alors les sommes de Darboux suivantes :

$$s(f, \sigma) = \sum_{K_{ijk} \subset \Omega} \left(\inf_{K_{ijk}} f \right) (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$$

et

$$S(\sigma) = \sum_{K_{ijk} \cap \Omega \neq \emptyset} \left(\sup_{K_{ijk}} f \right) (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$

On définit alors les intégrales triples par

Définition 2.1 On dit que f est intégrable si et seulement si

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{P}(R)} (s(f, \sigma)) = \inf_{\sigma \in \mathcal{P}(R)} (S(f, \sigma)) = \mathcal{I}(f, \Omega).$$

On appelle alors quand elle existe $\mathcal{I}(f, \Omega)$ l'intégrale de f sur Ω et on la note

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \mathcal{I}(f, \Omega).$$

Nous allons donner deux énoncés de Fubini

Théorème 2.1 (Formule de Fubini totale) On suppose qu'il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 continues définies sur $[a, b]$ telles que $c \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq d$. De plus on suppose qu'il existe deux fonctions ψ_1 et ψ_2 continues sur $[a, b] \times [c, d]$ telles que l'on puisse décrire le domaine Ω de la façon suivante

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}.$$

Alors Ω est cubable et si f est intégrable sur Ω alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Théorème 2.2 (Formule de Fubini partielle) On suppose qu'il existe une fonction qui à tout $z \in [a, b]$ associe Ω_z un domaine quarrable de $\mathbb{R}^2$. De plus on suppose cubable, le domaine Ω défini de la façon suivante

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq z \leq b, (x, y) \in \Omega_z\}.$$

Si f est intégrable sur Ω alors

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Remarque : comme dans $\mathbb{R}^2$, on peut échanger dans les théorèmes précédents les rôles de x , y et z .

On vérifie une formule de changement de variable dans $\mathbb{R}^3$ similaire à celle dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.3 (Formule de changement de variables)

Soit Ω un ensemble fermé, borné, cubable de $\mathbb{R}^3$. Soit F une fonction définie de Ω dans Ω_1 bijective et de classe C^1 . On suppose que pour tout $(x, y, z) \in \Omega$ $J_F(x, y, z) \neq 0$. On vérifie alors

$$\iiint_{\Omega} f(F(x, y, z)) |J_F(x, y, z)| dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f(u, v, w) du dv dw.$$

Pour conclure on donnera les formules de changement de variable en coordonnées sphériques. Si f est continue sur la boule $B(O, R)$ alors avec les notations en physique :

$$\iiint_{B(O,R)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

et avec les notations en mathématiques :

$$\iiint_{B(O,R)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Remarque : Le théorème de Fubini partiel permet de passer en coordonnées cylindriques dans les cas appropriés.

3 Rappels : Courbes paramétrées

3.1 Définition et interprétation

On appelle courbe paramétrée la donnée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto ((x(s), y(s))) \end{aligned}$$

Ceci permet de décrire un ensemble de points en facilitant le moyen de trouver des points de cet ensemble. Un ensemble décrit à l'aide d'une équation permet de vérifier si des éléments sont dans l'ensemble mais il peut-être plus difficile d'en trouver.

Trouver une courbe paramétrée qui décrive une ensemble s'appelle trouver une paramétrisation.

exemple :

Soit Γ_1 la courbe paramétrée définie par $x(t) = 3t - 2t^2 - 1$ et $y(t) = -t + t^2 + 1$ avec $t \in \mathbb{R}$. Soit $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + 2y - 1)^2 = x + 3y - 2\}$. Ces deux ensembles représentent la même parabole.

Une courbe paramétrée peut-aussi s'interpréter comme la description du mouvement d'un point du plan en fonction du temps dans une certain domaine. Sur une même courbe on peut bouger de plusieurs manières, on en déduit qu'il y a une infinité de paramétrisations possibles. De plus ces choix dépendent du choix du repère.

3.2 Paramétrage classique

Nous allons présenter plusieurs paramétrisations classiques des segments et des coniques (ellipses, paraboles, hyperboles).

Segments :

On peut décrire le segment joignant $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ soit en terme de barycentre, $M = \text{Bar}\{(A, (1-t)), (B, t)\}$ soit en écrivant $\vec{AM} = t\vec{AB}$ où $t \in [0, 1]$ (On part alors de A et on arrive en B). Donc une paramétrisation est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)a_1 + tb_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y(t) = (1-t)a_2 + tb_2 = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases}$$

Ellipses :

Les courbes d'équations $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ sont des ellipses de centre (α, β) d'axes (Ox) et (Oy) . On choisit souvent $x(t) = \alpha + a \cos(t)$ et $y(t) = \beta + b \sin(t)$ mais on peut changer le signe de a et b , échanger $\cos$ et $\sin$. On remarque que si $a^2 = b^2$ alors on a un cercle.

Paraboles :

Les courbes d'équations $k(x-a)^2 + b = y$ sont des paraboles de sommet (a, b) et dont l'axe de symétrie est parallèle à (Oy) . On peut choisir $x = t$ et $y = k(t-a)^2 + b$ ou $x = t + a$ et $y = kt^2 + b$. Les courbes d'équations $k(y-a)^2 + b = x$ sont des paraboles de sommet (b, a) et dont l'axe de symétrie est parallèle à (Ox) . On peut choisir $y = t$ et $x = k(t-a)^2 + b$ ou $y = t + a$ et $x = kt^2 + b$.

Hyperboles :

Les courbes d'équations $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ sont des hyperboles de centre (α, β) d'axes (Ox) et (Oy) et d'asymptotes les droites d'équations $\frac{(x-\alpha)}{a} - \frac{(y-\beta)}{b} = 0$ et $\frac{(x-\alpha)}{a} + \frac{(y-\beta)}{b} = 0$. On peut choisir $x(t) = \frac{a}{\cos(t)} + \alpha$ et $y(t) = b \tan(t) + \beta$. Si on choisit $x(t) = \pm \text{ch}(t) + \alpha$ et $y(t) = \text{sh}(t) + \beta$ on ne décrit alors qu'une seule branche de l'hyperbole.

3.3 Etude locale

Soit Γ une courbe paramétrée. On pose que $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$.

Proposition 3.1 *Si en t_0 , les fonctions x et y sont dérivables et si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ alors Γ admet une tangente au point $(x(t_0), y(t_0))$ dirigée par $(x'(t_0), y'(t_0))$.*

Si on pense en terme de mouvement sur une courbe, on comprend que ce résultat n'est qu'une implication.

1) Il est possible que la courbe admette une tangente alors que les fonctions x et y ne sont pas dérivables :

Ex : $x(t) = \operatorname{sgn}(t)\sqrt{|t|}$ et $y(t) = \operatorname{sgn}(t)\sqrt{|t|}$.

2) Il est possible que la dérivée existe (et s'annule) et que la courbe n'admette pas de tangente :

Ex : $x(t) = t^2$ et $y(t) = \operatorname{sgn}(t)t^2$.

3) Il est possible que la dérivée s'annule et que la tangente existe :

Ex : $x(t) = t^3$ et $y(t) = t^2$.

Si les fonctions x et y sont suffisamment régulières, alors si on note p la première dérivée telle que $(x^{(p)}(t), y^{(p)}(t)) \neq (0, 0)$ (c'est un vecteur directeur de la tangente). Si on note q le premier entier strictement plus grand que p tel que $(x^{(p)}(t), y^{(p)}(t))$ et $(x^{(q)}(t), y^{(q)}(t))$ ne soient pas colinéaires alors on peut faire une représentation locale :

- p impaire, q paire : point ordinaire

- p impaire, q impaire : point d'inflexion

- p paire, q impaire : point de rebroussement de première espèce.

- p paire, q paire : point de rebroussement de deuxième espèce.

3.4 Courbes en polaire

On donne parfois les paramétrisations en polaire de la forme $r = \rho(\theta)$. On a alors $x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta)$ et $y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta)$.

Les coniques peuvent s'écrire de la forme :

$$r = \frac{a}{1 - e \cos(\theta - \varphi)},$$

où $e \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [-\pi, \pi]$ sont fixés.

Si $e = 0$ on a l'équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $|a|$.

Sinon on a une conique dont un des axes (l'axe focal) est dirigé par la droite passant par $(0, 0)$ et d'angle φ par rapport à l'axe $(0x)$.

Si $e \in]0, 1[$, c'est une ellipse.

Si $e = 1$ c'est une parabole.

Si $e > 1$ c'est une hyperbole.

Exercice :

On se propose d'étudier la courbe paramétrée en polaire par

$$r = \rho(\theta) = \frac{3}{1 - 2 \cos(\theta - \frac{\pi}{3})},$$

- 1) Faire un tableau de variation de ρ sur $[-\pi, \pi]$.
- 2) Vérifier que la courbe est décrite dans sa totalité sur un intervalle de longueur 2π .
- 3) Comparer $\rho(\frac{2\pi}{3} - \theta)$ et $\rho(\theta)$, en déduire que la droite d'équation $y = \sqrt{3}x$ est un axe de symétrie.
- 4) Calculer la limite quand θ tend vers π par valeurs supérieures et inférieures de $x(\theta)$ et $y(\theta)$. En déduire qu'il existe une asymptote horizontale que l'on précisera.
- 5) En faisant une rotation de $\frac{\pi}{3}$ (i.e. on étudie $(\rho(\theta - \frac{\pi}{3}) \cos(\theta), \rho(\theta - \frac{\pi}{3}) \sin(\theta))$), montrer que la courbe admet une autre asymptote de la forme $y = -\sqrt{3}x + b$.
- 6) Dessiner la courbe, en plaçant les droites remarquables précédentes.

4 Intégrales curvilignes

4.1 Travail d'une force le long d'un chemin

Soit Γ une courbe joignant les points A et B . Si $(x(t), y(t))$ est un paramétrage de Γ sur le segment $[a, b]$ tel que $A = (x(a), y(a))$ et $B = (x(b), y(b))$ alors on appelle travail de la force $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ le long de Γ de A à B le réel suivant

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \cdot d\vec{\sigma} = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

On note aussi

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

Définition 4.1 On appelle forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ toute application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Si on note l'application linéaire $(h_1, h_2) \mapsto h_1$ par dx et si on note $(h_1, h_2) \mapsto h_2$ par dy alors toute forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire :

$$\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

La notation précédente permet de définir l'intégrale d'une forme linéaire, on écrira

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, si Γ est un chemin joignant A à B , on écrira

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_A^B \omega.$$

4.2 Propriétés algébriques

L'intégrale curviligne est une application linéaire sur les fonctions continues. Si Γ est un chemin joignant A à B et si C est un point de C alors

$$\int_A^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A^C P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_C^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Enfin signalons la propriété suivante :

$$\int_A^B P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_B^A P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Ces deux dernières propriétés nous montrent que dans le cas où Γ est une courbe fermée, alors la valeur de l'intégrale ne dépend du point de départ choisi mais du sens dans lequel on parcourt le chemin Γ , on parle alors de courbe orientée.

On dit d'une forme différentielle $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ qu'elle est exacte si et seulement si il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $df = \omega$.

Proposition 4.1 *Si ω est exacte sur un ouvert U , et si f est une primitive de ω alors pour tout chemin Γ inclus dans U joignant des points A et B ,*

$$\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = f(B) - f(A).$$

On fera la preuve de ce résultat en utilisant la définition.

Remarque : Dans ce dernier cas l'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru mais que du point de départ et du point d'arrivée. Dans le cas où Γ est un chemin fermé l'intégrale est alors nulle.

Pour finir nous allons donner un critère pour savoir si une forme différentielle est exacte. On rappelle d'abord le résultat de Schwartz pour les fonctions de classe C^2 . La propriété suivante donne la réciproque dans un cadre particulier.

Proposition 4.2 *Si ω est de classe C^1 et définie sur un ouvert étoilé U , alors ω est exacte si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$ sur U .*

Contre-exemple : On pourra donner l'exemple de la vis sans fin pour montrer que la condition d'étoilé est nécessaire.