

cours n^o 1: Intégrale sur $\mathbb{R}$

Introduction :

Le calcul d'aires est un vieux problème concret : Connaître la surface d'un champ, pour prévoir le volume de la production de blé et le volume nécessaire d'un grenier à blé pour stocker cette production. On peut souhaiter construire un grenier qui aît un volume maximal mais avec un périmètre minimal ce qui coûtera moins cher en briques. Un grenier cylindrique répondra à notre demande, on peut souhaiter évaluer la surface du mur et la surface de la toiture pour prévoir les matériaux pour la construction d'un tel grenier.

Ce sont Newton et Leibniz qui sont les précurseurs d'une définition mathématiques de l'intégrale à la fin du XVIIème siècle. C'est Riemann (1826-1866) qui donnera une première définition précise en 1854.

1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

1.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 1.1 On dit qu'une fonction f est une fonction en escalier (ou étagée) sur I si et seulement si il existe une famille finie de points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \\ f \text{ est constante sur }]x_i, x_{i+1}[, \forall 0 \leq i \leq n-1.$$

On dit alors que $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à f

On notera que les valeurs de la fonction aux différents points d'une subdivision adaptée sont quelconques.

Proposition 1.1 La somme de deux fonctions étagées sur I est une fonction étagée sur I . Si f est une fonction étagée sur I , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est aussi une fonction étagée. C'est à dire qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

Définition 1.2 On dit qu'une fonction f est continue par morceaux sur I si et seulement si il existe une famille finie de points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \\ f \text{ est continue sur }]x_i, x_{i+1}[, \forall 0 \leq i \leq n-1, \\ f \text{ est prolongeable par continuité sur } [x_i, x_{i+1}], \forall 0 \leq i \leq n-1.$$

On dit alors que $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à f

Proposition 1.2 *La somme de deux fonctions continues par morceaux sur I est une continue par morceaux sur I . Si f est une fonction continue par morceaux sur I , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est aussi une fonction continue par morceaux. C'est à dire qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.*

1.2 Intégrale

Définition 1.3 Intégrale d'une fonction étagée

Soit f une fonction étagée qui admet $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ comme subdivision adaptée et telle que $f(x) = a_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, alors on définit l'intégrale de f de a à b par

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} a_i * (x_{i+1} - x_i).$$

On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la subdivision. On a alors les résultats suivants.

Proposition 1.3 *Soient f et g deux fonctions étagées sur I .*

i) $\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

ii) *Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$,* $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$

iii) *Si pour tout x de I $f(x) \leq g(x)$ alors* $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$

iv) *Pour tout $c \in I$,* $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

v) *Si f et g diffèrent en un nombre fini de points, alors* $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt.$

Proposition 1.4 *Soit f une fonction continue par morceaux sur I , alors il existe deux suites de fonctions étagées $(f_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que*

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \\ f_{n-1}^-(x) \leq f_n^-(x) \leq f(x) \leq f_n^+(x) \leq f_{n-1}^+(x) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \forall x \in I, \\ \forall n \geq n_0, f_n^+(x) - f_n^-(x) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De plus les suites de réelles $I_n^+ = \int_a^b f_n^+(x)dx$ et $I_n^- = \int_a^b f_n^-(x)dx$ sont adjacentes.

Cette propriété énonce que toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme de suite de fonctions en escalier. On peut imposer à une telle suite d'être croissante ou décroissante. On fera la preuve en utilisant l'uniforme continuité sur un segment des fonctions continues.

Proposition 1.5 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux
Soit f une fonction continue par morceaux sur I alors, si on note $F^+(f)$ l'ensemble des fonctions étagées supérieures ou égales à f et $F^-(f)$ l'ensemble des fonctions étagées inférieures ou égales à f alors on vérifie

$$\sup_{f^- \in F^-} \int_a^b f^-(t) dt = \inf_{f^+ \in F^+} \int_a^b f^+(t) dt = I.$$

On pose par définition

$$I = \int_a^b f(t) dt.$$

La preuve est immédiate en utilisant la propriété précédente.

Proposition 1.6 Somme de Riemann

Soit f une fonction continue par morceaux sur I . Pour tout $n > 0$ fixé, on choisit n points $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $\frac{(i-1)(b-a)}{n} \leq x_i - a \leq \frac{i(b-a)}{n}$ et on pose

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\int_a^b f(t) dt$.

On fera la preuve dans le cas des fonctions continues dans un premier temps en montrant que l'on peut encadrer la valeur de S_n par les intégrales de deux suites de fonctions en escalier qui majorent et minorent f tout en convergent uniformément vers f . Pour passer aux fonctions continues par morceaux on expliquera que le résultat découlera de Chasles.

Proposition 1.7 *Soit (f_n) une suite de fonction continues par morceaux qui converge uniformément vers une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

On notera que la preuve a déjà été faite dans les preuves précédentes.

1.3 Propriété

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier sont encore vérifiées.

Proposition 1.8 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I*

$$i) \int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

- ii) Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
- iii) Si pour tout x de I $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- iv) Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.
- v) Si f et g diffèrent en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

Ces résultats sont bien sûr obtenus par convergence.

En appliquant iii) on montre facilement le résultat suivant:

Proposition 1.9 Inégalité de la moyenne

Si f est continue par morceaux sur I . Si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f sur I alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M.$$

Si on ajoute une hypothèse de continuité on a alors

Proposition 1.10 Egalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur I , alors il existe $c \in I$ tel que

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(t)dt.$$

On note d'abord que f étant continue, elle atteint son maximum et son minimum. En appliquant alors l'inégalité de la moyenne et le théorème de la valeur intermédiaire, on démontre la propriété

Proposition 1.11 Si f est continue par morceaux alors $|f|$ est continue par morceaux. (La réciproque est fausse). De plus on vérifie

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

On pourra donner comme contre-exemple $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{I}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

2 Fonctions définies par une intégrale

2.1 Intégrales et primitives

Définition 2.1 Soit f une fonction continue par morceaux sur I , alors pour tout $\alpha > \beta$ de I , on pose

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = - \int_{\beta}^{\alpha} f(t)dt.$$

On peut montrer que la relation de Chasles est vérifiée pour tout réels α, β, γ de I . Il est clair qu'une fonction continue par morceaux n'admet pas forcément de primitive.

Proposition 2.1 *Si f est continue par morceaux et non continue en un point $x \in]a, b[$ alors f n'admet pas de primitive.*

On fera la preuve en utilisant le théorème des accroissements finis (on utilise en fait le théorème de prolongement C^1). Cette propriété explique que soit la dérivée est continue, soit la dérivée a un comportement très chaotique. On pourra regarder l'exemple suivant:

Exercice : Contre-exemple

On considère sur $I = [-\pi, \pi]$ la fonction définie par

$$F(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- 1) Montrer que F est dérivable sur I . On note f sa dérivée.
- 2) Montrer que f n'est pas continue par morceaux sur I .
- 3) Montrer que $f(0) = 1$. Montrer que F n'est pas croissante au voisinage de 0.

Théorème 2.1 *Soit f une fonction continue sur I . Soit $\alpha \in I$, alors*

$$\forall x \in I, F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt,$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en α .

On en déduit que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. On démontre le théorème dans le cas où $a = \alpha$.

On obtient donc le résultat classique

Proposition 2.2 *Si f est une fonction continue sur I et si F est une primitive de f sur I , alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

On notera $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$.

On montrera cette propriété en utilisant le théorème précédent. En Td on pourra reprendre l'étude du contre-exemple du dessus.

Généralisation : On peut considérer pour u et v des fonctions dérivables la fonction définie par

$$G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt.$$

Il est facile de voir que G est dérivable en remarquant que si on note F une primitive de f alors

$$G(x) = F(u(x)) - F(v(x)).$$

2.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On s'intéresse aux fonctions définies par une formule de la forme:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt.$$

Si pour tout $x \in I$ un intervalle, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors F est bien définie sur I et on peut donner deux résultats de régularités sur F .

Remarque:

On pourra signaler le problème lié à la "formulation" pour la classification d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Par exemple

$$H(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(xt)xdt,$$

peut-être vue comme une primitive ou une intégrale dépendant d'un paramètre.
Rappel:

On rappelle que les fonctions de deux variables continues sur un compact de $\mathbb{R}^2$ sont uniformément continues sur ce compact. (On rappellera qu'un compact de $\mathbb{R}^2$ est un fermé borné et que toute suite y admet une sous-suite convergente).

Proposition 2.3 Continuité

Si f est continue sur $I \times [a, b]$ alors F est continue sur I .

On obtient le résultat par continuité uniforme sur tout domaine de la forme $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times [a, b]$.

Proposition 2.4 Dérivabilité

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a, b]$ et si pour tout $x \in I$ un intervalle, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors F est dérivable sur I et de plus

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

On fera la preuve en utilisant l'égalité des accroissements finis à t fixé et en utilisant le résultat précédent sur la continuité

On pourra donner un exemple où $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux pour tout x fixé mais telle que $(x, t) \mapsto f(x, t)$ n'est pas continue qui vérifie pourtant les hypothèses.

Exercice : On peut s'intéresser à la dérivabilité d'une fonction définie par

$$G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(x, t) dt.$$

Exemple:

$$G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{t^2 + x^2} dt.$$

3 Outils de calcul

3.1 Primitives usuelles

On rappelle les primitives usuelles

$$\begin{array}{ll} \int t^n dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, (n \neq -1), & \int t^{-1} dt = \ln(x), \\ \int \cos(t) dt = \sin(x), & \int \sin(t) dt = -\cos(x), \\ \int \operatorname{ch}(t) dt = \operatorname{sh}(x), & \int \operatorname{sh}(t) dt = \operatorname{ch}(x), \\ \int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{ax}, & \int a^t dt = \frac{1}{\ln(a)} a^x, \\ \int \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \operatorname{tg}(x), & \int \frac{1}{\sin^2(t)} dt = -\operatorname{cotg}(x), \\ \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg}(x), & \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \operatorname{arcsin}(x), \\ \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} dt = \operatorname{th}(x), & \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2(t)} dt = -\frac{1}{\operatorname{th}(x)}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), & \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|, \\ = \operatorname{argsh}(x), & (= \operatorname{argch}(x) \text{ si } x > 1.) \end{array}$$

3.2 Intégration par partie

Théorème 3.1 Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I , alors

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

3.3 Changement de variable

On remarque tout d'abord la formule suivante pour f une fonction continue et v une fonction C^1 sur I ,

$$\int_a^b f(v(t))v'(t)dt = \int_{v(a)}^{v(b)} f(t)dt.$$

On en déduit le théorème suivant

Théorème 3.2 *Soit f une fonction continue sur I . Soit u une bijection C^1 d'un intervalle J dans I . Alors on vérifie l'égalité suivante*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(s))u'(s)ds.$$

On dit alors que l'on a fait le changement variable $t = u(s)$.

Remarque :

Dans la pratique, on posera $t = u(s)$ et fera l'abus de notation $dt = u'(s)ds$.

4 Intégrales généralisées

Nous venons de définir les intégrales de fonctions continues par morceaux sur un segment.

Dans ce cours, nous nous intéresserons à des fonctions définies sur un intervalle I qui ne sera pas un segment mais qui seront intégrables sur tout segment inclus dans cet intervalle.

Exemples : on rencontrera trois grand cas en fonction de I . Soient $a < b$ deux réels fixés

- $I \in \{]a, b], [a, b[,]a, b\}$ et f n'est pas continue par morceaux sur $[a, b]$.
- $I \in \{]a, +\infty[, [a, +\infty[,]-\infty, a[,]-\infty, a\}$, et f n'admet par forcément de limite en a .
- $I = \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On veut alors proposer une définition dans un de ces cas de l'intégrale d'une fonction f sur un tel intervalle I que l'on notera bien sûr

$$\int_a^b f(t)dt.$$

4.1 Etude du cas $I =]a, b]$

Soit f une fonction définie sur $]a, b]$, continue par morceaux sur tout segment de I .

Définition 4.1 Pour tout $0 < \varepsilon < b - a$, on peut définir

$$I_\varepsilon = \int_{a-\varepsilon}^b f(t)dt.$$

Si la fonction $\varepsilon \mapsto I_\varepsilon$ admet une limite I_0 quand ε tend vers 0, alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale convergente (ou converge) et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = I_0.$$

Sinon on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est une intégrale divergente (ou diverge).

Voici plusieurs cas où $\int_a^b f(t)dt$ est convergente :

- 1) La fonction f admet une limite finie en a , on parle alors d'intégrale faussement impropre.
- 2) La fonction f est bornée.

On montre facilement que dans ce dernier cas il existe une constante M telle que pour tout $\varepsilon, \varepsilon'$, on vérifie

$$|I_\varepsilon - I_{\varepsilon'}| \leq M|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

On démontrera alors que la limite existe par exemple en montrant que les limites des borne sup et inf existent et sont égales. On signalera que l'on vérifie en fait le critère de Cauchy pour des fonctions:

Critère de Cauchy pour des variables réelles

Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in]x_0, x_0 + \eta[, |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

alors f admet une limite à droite en x_0 . (on peut généraliser ce résultat dans des espaces complets).

Proposition 4.1 Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ existe (on la note $F(a)$). Dans le cas de convergence on a alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Fonctions de références: On en déduit le résultat suivant

Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont convergentes si et seulement si $\alpha < 1$.

Définition 4.2 On dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

On note que ceci a un sens car $|f|$ est continue par morceaux sur tout segment de I .

Proposition 4.2 Soit f une fonction définie sur $I =]a, b]$ continue par morceaux sur tout segment de I . Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.

On fera la preuve en utilisant le critère de Cauchy (que l'on rappellera).

Cas des fonctions de signe constant :

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a, b]$ continues par morceaux sur tout segment de I telles que $\forall x \in I, f(x), g(x) \geq 0$.

- Si $f \leq g$ alors si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge. (Ces résultats sont immédiats car la positivité entraîne que l'on regarde en fonction de ε une fonction décroissante qui est soit majorée soit non bornée.)

- Si $f \sim_a g$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de mêmes natures. (La preuve se fera en utilisant les résultats d'encadrements en notant qu'au voisinage de a , $\frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq 2f(x)$.)

Définition 4.3 Si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente mais pas absolument convergente on parle d'intégrale semi-convergente.

Attention : dans les cas des intégrales semi-convergentes aucun résultat de comparaison ne peut s'appliquer.

Remarque : Si $I = [a, b[$ tous les résultats sont similaires.

4.2 Etude du cas $I = [a, +\infty[$

Soit f une fonction définie sur $I = [a, +\infty[$ continue par morceaux sur tout segment de I .

Définition 4.4 Pour tout $a < M$, on peut définir

$$I_M = \int_a^M f(t)dt.$$

Si la fonction $M \mapsto I_M$ admet une limite I_∞ quand M tend vers $+\infty$, alors on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale convergente (ou converge) et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = I_\infty.$$

Sinon on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est une intégrale divergente (ou diverge).

Remarques :

Il est possible que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et que f ne soit pas bornée.

Il est possible que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Proposition 4.3 Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors $l = 0$

On montrera le résultat par contraposée.

On obtient de manière immédiate le résultat suivant équivalent du cas précédent.

Proposition 4.4 Si F est une primitive de f , alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe.

Fonctions de références: On en déduit dans ce cas

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont convergentes si et seulement si $\alpha > 1$.

Les intégrales $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)^\alpha} dt$ sont convergentes si et seulement si $\alpha > 1$. (on remarquera que l'on est de la forme $\frac{u'}{u^\alpha}$)

Définition 4.5 On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente.

Encore une fois on note que ceci a un sens car $|f|$ est continue par morceaux sur tout segment de I .

Proposition 4.5 Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente.

On fera la preuve en utilisant le critère de Cauchy (que l'on rappellera en ∞).

Cas des fonctions de signe constant :

Soient f et g deux fonctions positives, définies sur $I = [a, +\infty[$ et intégrables sur tout segment de I . Les résultats de comparaisons restent vrais.

- Si $f \leq g$ alors si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.
- Si $f \sim_{+\infty} g$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de mêmes natures.

En utilisant les résultats de comparaison et les fonctions de références on obtient donc le critère de convergence suivant

Proposition 4.6 *Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.*

Exercice :

On pourra étudier le cas $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} dt$.

comparaison séries numériques et intégrales :

On pourra noter sur des exemples que si f n'est pas monotone on ne peut pas comparer $\int_0^\infty f(t)dt$ et la série numérique de terme général $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Par contre dans le cas où f est monotone on énoncera la propriété suivante

Proposition 4.7 *Soit f une fonction monotone, continue par morceaux sur tout segment de $[0, +\infty[$ alors l'intégrale généralisée $\int_0^\infty f(t)dt$ converge si et seulement si la série numérique de terme général $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans le cas de convergence et si f est décroissante, on vérifie les inégalités suivantes*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^\infty f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

On obtient le résultat par comparaison sur tout compact.

On peut en déduire le résultat connu pour les séries de bertrand.

Définition 4.6 *Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente mais pas absolument convergente on parle d'intégrale semi-convergente.*

Attention : dans les cas des intégrales semi-convergentes aucun résultat de comparaison ne peut s'appliquer.

On pourra étudier les exemples des fonctions $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2(t)}{t}$.

Remarque : Si $I =]-\infty, a]$ tous les résultats sont similaires.

4.3 Cas où I est ouvert

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $I =]a, b[$. Soit f une fonction définie sur I continue par morceaux sur tout segment de I . Signalons d'abord la propriété suivante

Proposition 4.8 *Si il existe $c_0, c_1 \in I$ tels que $\int_a^{c_0} f(t)dt$ et $\int_{c_1}^b f(t)dt$ soient convergentes alors pour tout $c \in I$ $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes.*

La preuve est immédiate par Chasles.

Définition 4.7 *Si il existe $c \in I$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes alors on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on pose*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Si non on dit que l'intégrale diverge.

Par définition, on est obligé de se ramener à l'étude sur chaque borne et donc dans les deux cas précédents. Signalons pour terminer que l'on peut trouver dans la littérature des énoncés sur de formules de changement de variables ou d'intégration par partie. Il a été fait comme choix dans ce cours que l'on se ramènerait par la définition aux intégrales sur un segment pour utiliser ces outils.

4.4 Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $I =]a, b[$.

On peut s'intéresser dans un premier temps au cas d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre entier n . On se donne une suite de fonctions f_n continues par morceaux sur tout segment de I telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_a^b f_n(t)dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

On suppose que f_n converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment de I . On se pose alors la question de savoir si $\mathcal{I} = \int_a^b f(t)dt$ est

convergente et si la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}$. On ne possède pour l'instant que l'outil de la convergence uniforme sur un segment, celui-ci est souvent insuffisant sur des segments pour conclure, il est encore plus inadapté sur des intervalles plus généraux.

Théorème 4.1 Théorème de convergence dominé

Sous les hypothèses précédentes, si de plus il existe une fonction g telle que

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N} |f_n(t)| \leq g(t) \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ est convergente,}$$

alors $\mathcal{I} = \int_a^b f(t)dt$ est convergente et la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}$.

On ne fera pas la preuve de ce résultat, on signalera juste qu'il est facile de démontrer que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

En utilisant ce théorème par contre on peut facilement montrer le résultat de continuité suivant

Proposition 4.9 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles définies sur $J \times I$, vérifiant*

- $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J .
- $\forall x \in J, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur tout segment de I .
- il existe une fonction h définie sur I , continue par morceaux sur tout segment de I , telle que

$$\begin{aligned} & -\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq h(t), \\ & - \int_a^b h(t)dt \text{ est une intégrale convergente.} \end{aligned}$$

Alors la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt,$$

est continue sur J .

On peut aussi démontrer le résultat de régularité suivant

Proposition 4.10 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles définies sur $J \times I$, telle que la dérivée partielle par rapport à la première variable existe en tout point de $J \times I$ et vérifiant*

- $\forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J .
- $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur tout segment de I .

- il existe une fonction h définie sur I , continue par morceaux sur tout segment de I , telle que

$$\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq h(t),$$

$$- \int_a^b h(t) dt \text{ est une intégrale convergente.}$$

- $\forall x \in J$,

$$-t \longmapsto f(x, t) \text{ est continue par morceaux sur tout segment de } I$$

$$- \int_a^b f(x, t) dt \text{ est convergente}$$

Alors la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

est de classe C^1 sur J et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

4.5 Application: Etude de la fonction Γ

On définit pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Avec les résultats précédents on peut montrer que Γ est une fonction C^∞ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En intégrant par partie on peut montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.