Examen d'Intégration Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.

(Le barème est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 : (9pts) Intégrales doubles

On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

1) Etude de Ω .

a) Pour $k > 0$, donner la nature du domaine, $\Gamma_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 = k^2\}$.

b) Dessiner Γ_1 , Γ_3 et Ω sur une même figure.

c) On note $\Omega_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq k^2\}$. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}^2$, exprimer $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ en fonction de $\iint_{\Omega_1} f(x, y) dx dy$ et $\iint_{\Omega_3} f(x, y) dx dy$.

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_{\Omega} \sqrt{4x^2 + y^2} dx dy.$$

2) Calcul de $J = \iint_{\Omega_1} \sqrt{4x^2 + y^2} dx dy$.

a) Énoncer la formule de Green-Riemann.

b) Montrer que $J = \frac{1}{3} \int_{\Gamma_1^+} -y\sqrt{4x^2 + y^2} dx + x\sqrt{4x^2 + y^2} dy$

c) Donner un paramétrage de Γ_1^+ .

d) Calculer J avec ce paramétrage.

3) Calcul de $K = \iint_{\Omega_3} \sqrt{4x^2 + y^2} dx dy$. (On se propose d'utiliser une autre méthode que celle pour J .)

a) Énoncer le théorème de changement de variable en dimension 2.

b) On définit $F(x, y) = (2x, y)$, montrer que F est une bijection de Ω_3 dans $B(0, 3)$, le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 3. Calculer le jacobien de F .

c) Montrer que $K = \frac{1}{2} \iint_{B(0,3)} \sqrt{u^2 + v^2} du dv$.

- d) Énoncer la formule de changement de variable en polaire.
 e) Calculer K en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.

4) En déduire I .

Exercice 2 :(7pts) Intégrale triple

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les intégrales suivantes

$$I_n = \iiint_{\Omega_n} \cos(z) - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right) dx dy dz,$$

avec $\Omega_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < x < 1, \frac{1}{n} < y < n, 0 < yz < x^2\}$.

- 1) Énoncer le théorème de Fubini en dimension 3.
 2) En appliquant le théorème de Fubini, montrer que

$$I_n = \int_0^1 \left[\int_{\frac{1}{n}}^n \sin\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^2}{y} \cos\left(\frac{x^2}{y}\right) dy \right] dx.$$

- 3) Calculer la dérivée de $y \mapsto y \sin\left(\frac{x^2}{y}\right)$. En déduire que

$$I_n = \int_0^1 n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n} \sin(nx^2) dx.$$

- 4) On pose $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) - \frac{1}{n} \sin(nx^2)$.

a) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$, vers une fonction que l'on précisera.

b) Montrer que la suite (I_n) admet une limite et la calculer (on pourra utiliser le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$. On précisera le nom du théorème utilisé).

Exercice 3 :(4pts) Intégrale généralisée à paramètre.

On souhaite étudier la fonction suivante

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xt^2)}{1+t^2} dt.$$

- 1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
 2) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
 3) Le théorème de dérivabilité peut-il s'appliquer ? (justifier votre réponse).