Chapitre V : Champs de scalaires, champs de vecteurs

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *décrire les principales propriétés d'un champ scalaire ou vectoriel*
- *trouver les lignes de champ d'un champ de vecteurs*
- *reconnaître un champ à circulation ou à flux conservatif*

I Définitions

En Physique, on définit un *champ de scalaires* ou un *champ de vecteurs* lorsque l'on associe à chaque point d'une région de l'espace une grandeur scalaire ou vectorielle. Par exemple:

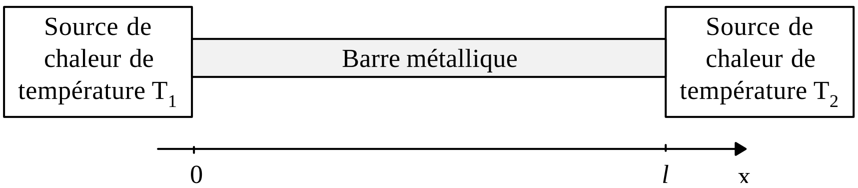
- Température en chaque point d'une pièce : champ de scalaires

- Champ électrique entre les armatures d'un condensateur : champ de vecteurs défini par les trois fonctions scalaires: $E_x(x,y,z)$ $E_y(x,y,z)$ et $E_z(x,y,z)$.

Pour définir complètement le champ, on doit se donner le domaine D de l'espace où le champ prend ses valeurs.

Bien souvent en Physique, la connaissance des valeurs du champ sur les limites du domaine D (les "conditions aux limites") sera fondamentale pour la détermination complète du champ.

Exemple :



En tout point d'abscisse x de la barre, on définit le champ de température $T(x)$ (champ de scalaires). Le domaine D est la barre. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$T(x=0) = T_1 \quad \text{et} \quad T(x=l) = T_2 \,.$$

- On dit qu'un champ est *uniforme* dans une région D de l'espace si la grandeur définissant le champ prend la même valeur en chaque point de D.

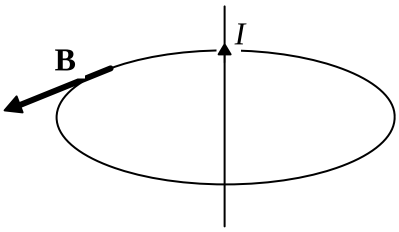
- On dit qu'un champ est *stationnaire* ou *permanent* dans une région *D* de l'espace si la grandeur définissant le champ ne dépend pas du temps en chaque point de *D*.

II Lignes de champ, Tubes de champ

Dans la suite, on supposera que l'application qui à tout point *M* associe la valeur du champ en *M* possède toutes les propriétés mathématiques nécessaires aux opérations envisagées.

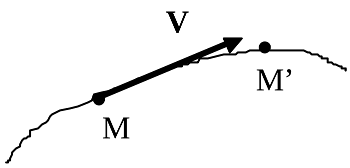
1°- Définitions

Considérons un champ de vecteurs **V**(*M*). Une *ligne de champ* est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ **V** défini en ce point. Par exemple, les lignes de champ du champ magnétique **B** créé par un fil infiniment long parcouru par un courant d'intensité *I* sont des cercles.



2°- Equations des lignes de champ

Soit $M(x,y,z)$ un point d'une ligne de champ. Par définition, le point *M'* tel que **OM'**=**OM**+d**OM** appartient à la ligne de champ si **MM'** est parallèle à **V** lorsque *M'* se rapproche de *M*.



On écrit donc que **MM'**=d**OM** et **V** sont liés, soit: d**OM** = l**V**

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

d'où en éliminant l :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

Pour connaître l'équation des lignes de champ, il suffit de résoudre par exemple:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{V_x}{V_z} = f(x,y,z) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{V_y}{V_z} = g(x,y,z)$$

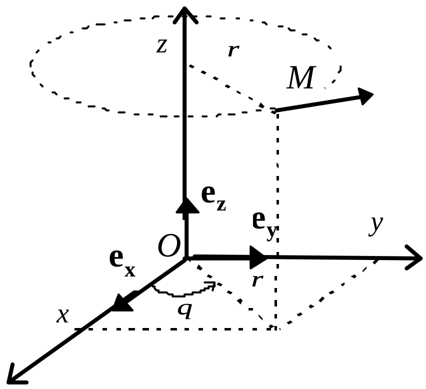
- En coordonnées cylindriques, l'équation d**OM** = l**V** s'écrit :

$\frac{dr}{V_r} = \frac{r dq}{V_q} = \frac{dz}{V_z}$ où V_r , V_q et V_z sont les coordonnées de **V** sur la base locale des coordonnées cylindriques.

- En coordonnées sphériques, l'équation d**OM** = l**V** s'écrit :

$\frac{dr}{V_r} = \frac{r dq}{V_q} = \frac{r \sin q dj}{V_j}$ où V_r , V_q et V_j sont les coordonnées de **V** sur la base locale des coordonnées sphériques.

Exemple : Equation des lignes de champ du champ magnétique créé par un fil infiniment long parcouru par un courant d'intensité I :



On choisit les coordonnées cylindriques où **B** s'écrit sur la base locale: **B** = B_q **e**$_q$ (la seule composante non nulle de **B** est sur **e**$_q$: B_r=0 et B_z=0)

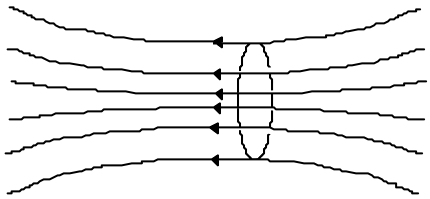
Les équations différentielles définissant les lignes de champ s'écrivent :

$dz = \frac{B_z}{B_q} r dq = 0 \Rightarrow z = cte$: les lignes de champ sont dans des plans z = cte.

$dr = \frac{B_r}{B_q} r dq = 0 \Rightarrow r = cte$: les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du fil(ces courbes peuvent être matérialisées par de la limaille de fer)

3°- Tube de champ

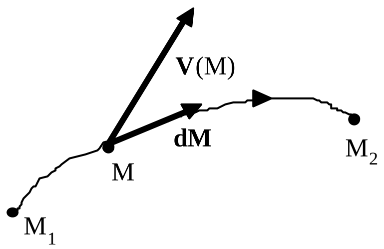
On appelle *tube de champ* la surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé.



III Circulation d'un champ de vecteurs

1°- Définition

Soit une région de l'espace où sont définis un champ de vecteurs **V** et une courbe *G* orientée (c'est-à-dire dont on a choisi le sens de parcourt positif).



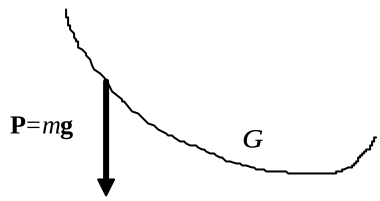
Soit **dM** le vecteur déplacement élémentaire sur *G*. On appelle circulation élémentaire de **V**(*M*) :

$$\boxed{dC = \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM}}$$

La limite de la somme $\sum \mathbf{V}(M) \bullet \Delta\mathbf{M}$ lorsque **DM** tend vers **0** est la *circulation* de **V**(*M*) sur la courbe *G*. En terme plus mathématique, on parlera d'*intégrale curviligne* de **V**(*M*) sur *G*.

On notera: $$\boxed{C(\mathbf{V},\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{V} \bullet \mathbf{dM}}$$

Signification physique: Si par exemple **V** est un champ de force, la circulation de **V** n'est autre que le travail de cette force lorsque son point d'application se déplace suivant *G*.



2°- Technique de calcul

La courbe G est souvent donnée par son équation paramétrique $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$.Le paramètre u prend les valeurs u_1 et u_2 aux points M_1 et M_2. Chaque composante de **V** en un point M de la courbe G peut donc s'exprimer en fonction de u :

$$V_x(x,y,z) = V_x(x(u),y(u),z(u)) = V_x(u).$$

Un déplacement de **dM** du point M sur la courbe G correspond à une variation élémentaire du de u, soit:

$$\mathbf{dM} = dx\ \mathbf{e}_x + dy\ \mathbf{e}_y + dz\ \mathbf{e}_z = \left(\frac{dx}{du}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{du}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{du}\mathbf{e}_z\right)\cdot du$$

D'où

$$C(\mathbf{V},\Gamma) = \int_\Gamma \left(V_x dx + V_y dy + V_z dz\right) = \int_{u_1}^{u_2}\left(V_x\frac{dx}{du} + V_y\frac{dy}{du} + V_z\frac{dz}{du}\right)\cdot du$$

et on obtient une intégrale simple.

Remarque:

- En cylindriques, on écrira : $C(\mathbf{V},\Gamma) = \int_\Gamma \left(V_{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} + V_{\boldsymbol{q}}\, \boldsymbol{r} d\boldsymbol{q} + V_z dz\right)$

- En sphériques, on écrira :

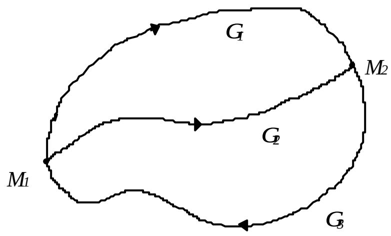
$$C(\mathbf{V},\Gamma) = \int_\Gamma \left(V_r dr + V_{\boldsymbol{q}}\ r d\boldsymbol{q} + V_{\boldsymbol{j}}\ r \sin\boldsymbol{q}\, d\boldsymbol{j}\right)$$

Exemple : En cinématique, l'abscisse curviligne c'est à dire la distance parcourue par un mobile M se déplaçant sur une courbe G entre les instants t_1 et t_2 est la circulation du vecteur tangent à la courbe en M: $\mathbf{T}(M)$.

$$M_1M_2 = C(\mathbf{T},\Gamma) = \int_\Gamma \mathbf{T} \bullet \mathbf{dM} = \int_\Gamma \frac{\mathbf{v}(M)}{v} \bullet \mathbf{v}(M)dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

$\mathbf{v}(M)$ étant le vecteur vitesse de module v du mobile en M. Le paramètre est ici le temps t.

3°- Champ de vecteurs à circulation conservative



Un champ de vecteurs est dit à *circulation conservative* si sa circulation le long d'un contour fermé est nulle quel que soit ce contour:

$$\forall\ \Gamma_{fermé} \quad \oint_{\Gamma_{fermé}} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} = 0$$

conséquence : La circulation d'un champ de vecteurs à circulation conservative le long d'une courbe allant de M_1 à M_2 ne dépend pas de la courbe, mais seulement des points extrêmes.

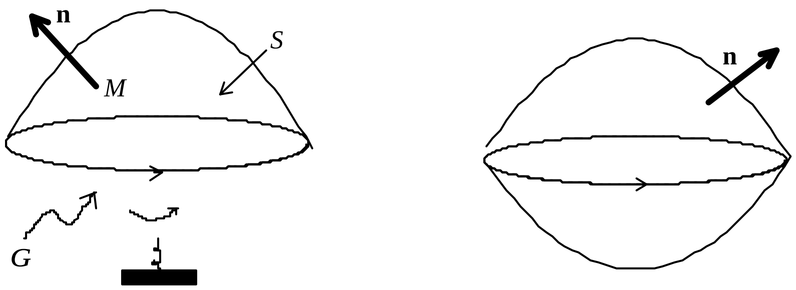
En effet :

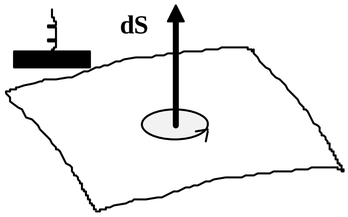
$$\begin{cases} \oint_{\Gamma_1+\Gamma_3} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} = 0 \\ \oint_{\Gamma_2+\Gamma_3} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dM}$$

IV Flux d'un champ de vecteurs

1°- Vecteur élément de surface



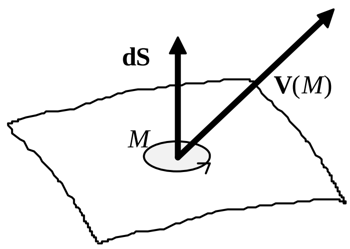


- Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé orienté G. La *normale positive* au point M est la droite (M,**n**) où **n** est un unitaire orthogonal à S en M. Son sens est lié conventionnellement au sens de circulation positif sur le contour et est donné par la règle du tire bouchon de Maxwell.

- Si la surface est fermée, le sens de la normale positive est pris dans le sens sortant.

- Le *vecteur élément de surface* **dS** associé à un élément de surface d'aire dS découpé sur S est défini par: $\boxed{\mathbf{dS} = dS \cdot \mathbf{n}}$

2°- Définition du flux:



Le *flux élémentaire* de **V**(*M*) à travers l'élément de surface *dS* est le scalaire:

$$\boxed{df = \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dS}}$$

La limite de la somme $\sum \mathbf{V}(M) \bullet \Delta\mathbf{S}$ lorsque **DS** tend vers **0** est le *flux* de **V**(*M*) *à travers* la surface *S*. On notera:

$$\boxed{f(\mathbf{V}, S) = \iint_S \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dS}}$$

Deux situations très fréquentes en Physique:

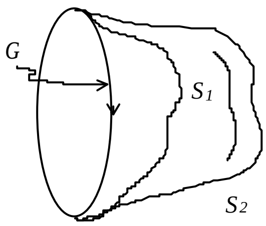
- Si **V**(*M*) est en tout point de *S* dans le plan tangent en *M* à *S*, on a $\forall M \quad \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dS} = 0$ et donc $f(\mathbf{V}, S) = \iint_S \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dS} = 0$
- Si **V**(*M*) est de module uniforme sur *S* $\left(\forall M \in S \; |\mathbf{V}(M)| = V_0\right)$ <u>et</u> de direction **n**(*M*) en tout point de *S*, alors:, $\mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dS} = V_0 dS$ d'où $f(\mathbf{V}, S) = V_0 \cdot S$

3°- Champ de vecteurs à flux conservatif

Un champ de vecteurs est dit à *flux conservatif* si son flux à travers une surface fermée est nul quelle que soit la surface fermée

$$\boxed{\forall\, S \;\; fermée \;\; f(\mathbf{V}, S) = \oiint_{S_{fermée}} \mathbf{V}(M) \bullet \mathbf{dS} = 0}$$

conséquence:



Le flux d'un champ de vecteurs à flux conservatif à travers une surface ouverte S ne dépend que du contour G sur lequel s'appuie S.

La démonstration est analogue à celle des champs de vecteurs à circulation conservative.

Exercices : Champs de vecteurs

Expression d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques

Soit le point $M(x,y,z)$. On considère l'application qui à $M(x,y,z)$ associe

$$\mathbf{A} = 2x\,\mathbf{e_x} + y\,\mathbf{e_y} + z\,\mathbf{e_z}\,.$$

Ecrire les composantes de **A** en fonction des coordonnées cylindriques de M dans la base locale des coordonnées cylindriques en M.

Réponse: $\mathbf{A}=r(1+\cos^2\theta)\mathbf{e}_r - (1/2)\sin 2\theta\,\mathbf{e}_\theta + z\,\mathbf{e}_z$

Lignes de champ d'un champ magnétique

Donner les lignes de champ du champ magnétique **B** créé par un fil infiniment long parcouru par un courant d'intensité I.

On donne $\mathbf{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathbf{e}_\theta$

Flux sortant du champ de pesanteur terrestre

Calculer le flux du champ de pesanteur à travers la surface de la terre. Application numérique.

Réponse: $\phi=-5.10^{15}\ m^3.s^{-2}$

Flux d'un champ de vecteur à flux conservatif

Montrer que, à travers une surface ouverte quelconque S, le flux d'un champ à flux conservatif ne dépend que du contour sur lequel s'appuie S.